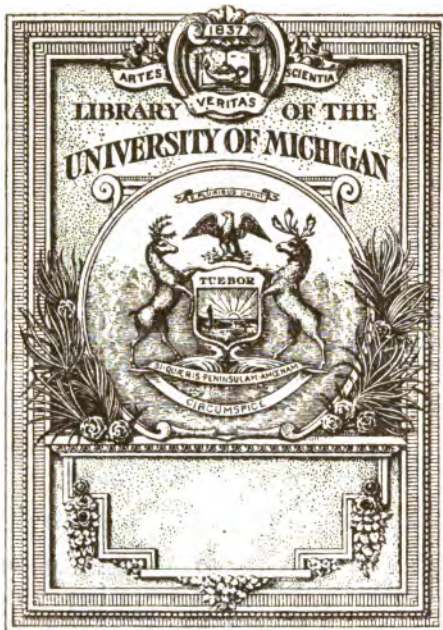
Sammlung Schubert

Sammlung mathematischer Lehrbücher.

V… …n Bände.

B… … Professor … .80. … flieger in … von Dr. … ohnert in … , Wahr- … und dio- … Hermann … Zahlen- … . 4.40. … ud. Böger … f. Dr. Max … : Gerade, … in Straß- … Meyer in … der dar- … chröder in … chlesinger … Runge in … rechnung … oßmann in … Teil: Die … Max Simon



„XXVII: **Geometrische Transformationen. I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Professor Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.

„XXIX: **Allgeme… …rven und Flächen I. Tei…** …erell in Reutlingen und F… Heilbronn. M. 4.80.

Band XXXI: **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. Mk. 8.50.
„ XXXII: **Theorie und Praxis der Reihen** von Professor Dr. C. Runge in Hannover. M. 7.—.
„ XXXIV: **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. M. 12.—.
„ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. M. 10.—.
„ XXXVIII: **Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung** I. Teil von Prof. E. Grimsehl in Hamburg M. 6.—.
„ XXXIX: **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. M. 10.—.
„ XL: **Mathematische Optik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 6.—.
„ XLI: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik und Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 5.—.
„ XLII: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II. Tl.: Magnetismus u. Elektromagnetismus** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. M. 7.—.
„ XLIV: **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 5.80.
„ XLV: **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.80.
„ XLVI: **Thetafunktionen u. hyperelliptische Funktionen** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 4.50.
„ XLVIII: **Thermodynamik II. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. M. 10.—.
„ XLIX: **Nichteuklidische Geometrie** von Prof. Dr. Heinr. Liebmann in Leipzig. M. 6.50.

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Integralrechnung von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.
Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
Darstellende Geometrie II. Teil: Anwendungen der darstellenden Geometrie von Prof. Erich Geyger in Kassel.
Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.
Dynamik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Geodäsie von Prof. Dr. A. Galle in Potsdam.
Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Straßburg.
Räumliche projektive Geometrie.

Sammlung Schubert XXXVIII

Angewandte Potentialtheorie

in

elementarer Behandlung

von

E. Grimsehl

Professor an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg

I. Band

Mit 74 Figuren

Leipzig

G. J. Göschensche Verlagshandlung

1905

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Vorwort.

Der vorliegende I. Band der angewandten Potentialtheorie behandelt die allgemeinen Grundlagen der Potentialtheorie und die Anwendung der Potentialtheorie auf physikalische Erscheinungen und Probleme aus der Lehre von der Gravitation und aus der Elektrostatik. Der II. Band wird den Magnetismus, den Elektromagnetismus und die elektrischen Ströme behandeln.

Die Ableitungen sind möglichst elementar, unter Mitbenutzung der einfachsten Begriffe aus der Differential- und Integralrechnung, gehalten. Es war der Wunsch des Verfassers, das Buch auch für solche Leser verständlich zu machen, denen die Behandlung schwieriger mathematischer Probleme und Ableitungen ferner liegt.

Für Durchsicht des Manuskriptes ist der Verfasser Herrn cand. Zwingenberger, Hamburg, dankbar.

Hamburg, im Februar 1905.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die Potentialtheorie beschäftigt sich mit den Kräften, die dem Quadrate der Entfernung ihrer Angriffspunkte umgekehrt proportional sind; sie behandelt also in erster Linie diejenigen Kräfte, die man wohl mit dem Namen der fernwirkenden Kräfte bezeichnet. Das sind die Gravitation, die magnetische und die elektrische Kraft. So kommt es, daß man besonders die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrostatik vielfach vollständig unter dem Gesichtspunkte der Potentialtheorie behandelt, und daß ferner solche magnetische und elektrische Vorgänge im Anschluß an die Potentialtheorie besprochen werden, auf die die Potentialtheorie entweder nur hinweist, oder die bekannt und behandelt sein müssen, um die zur Potentialtheorie notwendigen Vorbedingungen herleiten zu können.

In der „Sammlung Schubert“ wird die rein mathematische Behandlung der Potentialtheorie in einem besonderen Bande behandelt werden, daher kann der vorliegende Band von schwierigen mathematischen Problemen vollständig absehen, es werden vielmehr die mathematischen Herleitungen vorwiegend elementar gehalten. Allerdings wird von den Elementen der Infinitesimalrechnung oft Gebrauch gemacht, wenn die ganz elementare Herleitung zu schwerfällig wird.

Dagegen sollen die Anwendungen der Potentialtheorie auf physikalische Probleme eingehend behandelt werden.

Zum Potentialbegriffe kommt man auf zwei verschiedenen Wegen. Mathematisch definiert ist die Potentialfunktion diejenige Funktion, deren negativ genommenen Differentialquotienten nach dem Wege die in dessen Richtung wirkenden Komponenten einer Kraft sind. Physikalisch wird das Potential aus dem Arbeitsbegriffe hergeleitet. Dem Zwecke vorliegenden Buches entsprechend wird die letztere Herleitung hier durchgeführt.

I. Teil.

Allgemeine Potentialtheorie.

§ 1. Das Kraftfeld.

Der Raum, innerhalb dessen eine Kraft wirkt, wird ein Kraftfeld genannt. Demnach kann man z. B. von einem Gravitationsfelde, einem magnetischen, einem elektrischen, einem Wärmefelde reden, je nachdem der betrachtete Raum das Wirkungsgebiet der Gravitation, magnetischer, elektrischer oder thermischer Kräfte ist. Das Vorhandensein derartiger Kräfte äußert sich in seinen Wirkungen an Körpern, indem gewisse Zustände der Körper in dem Kraftfelde eine durch die Art und die Stärke der wirkenden Kräfte bestimmte Größe annehmen. Findet eine Bewegung des Körpers in dem Kraftfelde statt, so wird im allgemeinen eine Zustandsveränderung des Körpers die Folge sein. Jede Zustandsveränderung eines Körpers erfordert aber nach dem Energiegesetze einen Arbeitsaufwand, dessen Größe deshalb auch ein Maß für die Zustandsveränderung selbst ist. Aus diesem Grunde ist die Bestimmung der zur Bewegung eines Körpers in dem Kraftfelde erforderlichen Arbeit für die Kenntnis des Zustandes eines Körpers, sowie auch für die Kenntnis des Kraftfeldes selbst von größter Wichtigkeit.

Die Arbeit wird gemessen durch das Produkt aus der Kraftgröße in den Weg, längs dessen der Körper bewegt wird. Fällt die Kraftrichtung mit der Bewegungsrichtung zusammen, so tritt in dem Ausdrucke für die Arbeit sowohl die Kraft k als auch der Weg s in ganzer Größe als Faktor des Produktes auf. Bildet dagegen die Kraftrichtung mit der Bewegungsrichtung den Winkel α, so tritt nur die in

die Bewegungsrichtung fallende Kraftkomponente $K \cos \alpha$ (Fig. 1) als ein Faktor des Produkts auf, so daß dann die

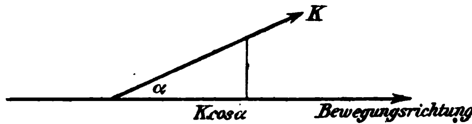


Fig. 1.

Arbeit für die Bewegung längs der Wegstrecke s dargestellt wird durch das Produkt $A = K \cos \alpha \cdot s$.

§ 2. Zusammensetzung von Kräften.

Ist ein Kraftfeld (Fig. 2) das Wirkungsgebiet zweier Kräfte K_1 und K_2, welche gleichzeitig auf einen Körper M einwirken, so hat man zur Bestimmung der Gesamtwirkung

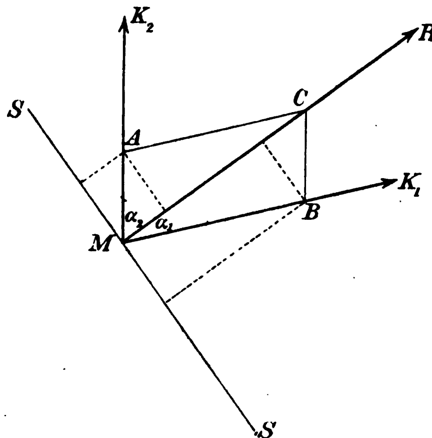


Fig. 2.

nach einer bestimmten Richtung R die beiden in der Richtung R wirkenden Komponenten, das sind die Projektionen der Kräfte auf diese Richtung, einzeln zu berechnen und dann zu addieren. Wenn also die beiden Kraftrichtungen von K_1 und K_2 mit der Richtung R die Winkel α_1 und α_2

einschließen, so ist die in der Richtung R wirkende Resultierende der beiden Kräfte, die selbst mit R bezeichnet werden möge,

$$R = K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2 .$$

Offenbar hat diese Resultierende einen von der Größe der beiden Winkel α_1 und α_2 abhängigen Wert. Nennt man den Winkel $\alpha_1 + \alpha_2 = \varrho$, so kann man die Resultierende auch schreiben:

$$R = K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos(\varrho - \alpha) .$$

Es ist von Interesse zu untersuchen, wann dieser Wert zu einem Maximum wird. Das ist der Fall, wenn $\frac{dR}{d\alpha} = 0$, also wenn

$$K_1 \sin\alpha_1 -- K_2 \sin(\varrho - \alpha_1) = 0 ,$$

d. h. wenn

$$K_1 \sin\alpha_1 = K_2 \sin\alpha_2$$

wird.

Diese Gleichung hat eine einfache physikalische Bedeutung: Zieht man die zu R senkrechte Gerade S und projiziert die beiden Kräfte K_1 und K_2 auf die Richtung von S, so heißen die beiden in dieser Richtung wirkenden Komponenten $K_1 \sin\alpha_1$ und $K_2 \sin\alpha_2$. Die obige Gleichung drückt also aus, daß der maximale Wert der Resultierenden dann erreicht wird, wenn die Komponenten der beiden Kräfte K_1 und K_2 in einer zu R senkrechten Richtung die Resultierende Null ergeben. Man bezeichnet den maximalen Wert der Resultierenden gewöhnlich mit dem Namen der Resultierenden schlechtweg und definiert diese Resultierende als diejenige Kraft, welche einen frei beweglichen Körper ebenso beeinflußt, wie die beiden Seitenkräfte K_1 und K_2 zusammen.

Die oben abgeleitete Gleichung $K_1 \sin\alpha_1 = K_2 \sin\alpha_2$ läßt sich noch geometrisch interpretieren. Zieht man nämlich durch die Endpunkte A und B der die Kräfte darstellenden Strecken MA und MB die Parallelen AC und BC, so ergibt sich, daß obige Gleichung die Bedingung dafür ist, daß die Richtung R durch den vierten Endpunkt C des Parallelogramms $MABC$ geht. Die Diagonale des Parallelogramms gibt durch ihre Länge gleichzeitig die Größe der Resultierenden $R = K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2$ an.

Dieser Satz ist unter dem Namen des „Kräfteparallelogramms“ genügend bekannt.

Will man nach dem Satze vom „Kräfteparallelogramm“ die Resultierende mehrerer Kräfte bilden, so hat man die Einzelkräfte geometrisch zu addieren. Für die Praxis hat diese Art der Bildung der Resultierenden wenig Bedeutung, da es sich fast niemals darum handelt, einen frei beweglichen Körper zu betrachten, sondern die Bewegung auf einer durch die Natur der Aufgabe bedingten vorgeschriebenen Bahn zu untersuchen. Außerdem ist die geometrische Addition der Strecken unbequem. Bequemer kommt man zum Ziel, wenn man zur Berechnung der Resultierenden mehrerer Kräfte nach einer bestimmten Richtung alle Einzelkräfte auf diese Richtung projiziert und dann die Projektionen addiert. Wirken z. B. nach Figur 3 auf den Körper M die fünf Kräfte $K_1 \ldots K_5$ ein, welche mit der Richtung von R die Winkel $\alpha_1 \ldots \alpha_5$ einschließen, wobei alle Winkel in demselben Sinne von R aus gerechnet werden mögen, so ist

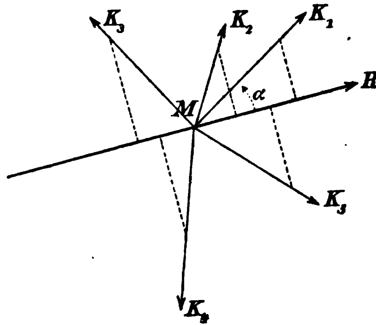


Fig. 3.

$$R = K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2 + \ldots + K_5 \cos\alpha_5 \,.$$

Allgemein ergibt sich auf dieselbe Weise

$$R = \Sigma K \cos\alpha \,. \tag{1}$$

§ 3. Arbeit.

Bewegt man den Körper M längs der Bahn von R um die Strecke s entgegen der Richtung von R, so wird eine Arbeit geleistet, deren Größe durch das Produkt $A = R \cdot s$ gemessen wird. Multipliziert man in der Gleichung (1) beide Seiten mit s, so ergibt sich

$$R \cdot s = \Sigma K \cos\alpha \cdot s \,.$$

Hierin bedeutet jeder Summand $K \cos \alpha \cdot s$ auf der rechten Seite der Gleichung die Arbeit, die geleistet werden muß, damit der Körper M die Wegstrecke s auf der Bahn von R zurücklegt, wenn er nur von dieser Kraft K beeinflußt würde. Nennen wir diese Einzelarbeiten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots,$ so folgt unmittelbar der wichtige Satz

$$A = \Sigma \mathfrak{A}, \tag{2}$$

d. i. also:

„Wird ein von mehreren Kräften beeinflußter Körper in dem Kraftfelde bewegt, so ist die zur Bewegung erforderliche Gesamtarbeit gleich der algebraischen Summe der Einzelarbeiten, die geleistet werden müßten, wenn man den Körper um dieselbe Wegstrecke, beeinflußt von jeder Einzelkraft bewegen würde."

Man braucht also die Einzelarbeiten nur algebraisch zu addieren, um die Gesamtarbeit für mehrere Kräfte zu bestimmen.

§ 4. Unabhängigkeit der Arbeit vom Wege.

Der Ausdruck $\mathfrak{A} = K \cos \alpha \cdot s$ läßt sich auch in die beiden Faktoren K und $s \cos \alpha$ zerlegen. Der zweite Faktor ist die Projektion der Wegstrecke s auf die Richtung der Kraft K. Man erhält also dieselbe Arbeitsgröße, wenn man den Körper M um die Wegstrecke s, welche mit der Richtung der Kraft K den Winkel α einschließt, bewegt, oder wenn man denselben Körper M auf einer mit der Kraftrichtung zusammenfallenden Bahn um eine Strecke bewegt, welche der Projektion der Wegstrecke s auf die Kraftrichtung gleich ist. Es ist demnach (Fig. 4) zur Bewegung des Körpers M nach dem Punkte P dieselbe

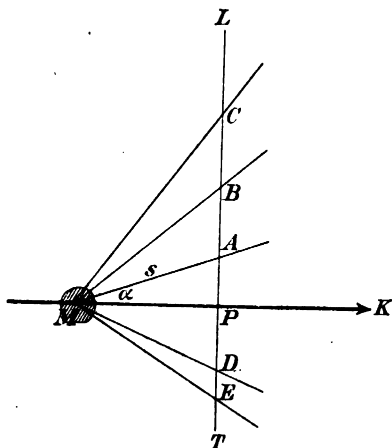


Fig. 4.

Arbeit erforderlich, wie zur Bewegung nach A. Hieraus folgt ferner, daß auch derselbe Arbeitsaufwand erforderlich ist, um den Körper nach irgend einem Punkte B, C, D oder E der in P auf MK errichteten Senkrechten zu bewegen. Vorausgesetzt ist hierbei, daß die Kraft an allen Stellen dieselbe Größe und dieselbe Richtung habe. Es folgt hieraus endlich, daß zur Bewegung des Körpers M auf einer zu MK senkrechten Richtung keine Arbeit gegen die Kraft K erforderlich ist, denn es ist für diese Bewegung das Produkt $s \cos \alpha$, also die Projektion des Weges auf die Kraftrichtung gleich Null.

Wir können die eben hergeleitete Beziehung der Gleichheit verschiedener Arbeiten noch zur Ableitung einer anderen wichtigen Tatsache benutzen.

Wenn wir den Körper M, auf den die Kraft K in der angegebenen Richtung (Fig. 5) wirkt, von M erst nach

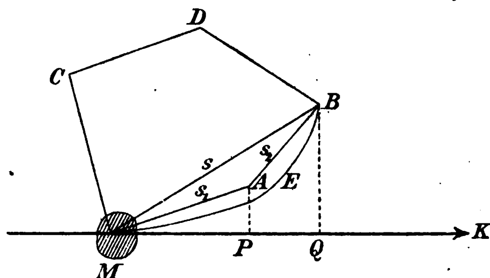


Fig. 5.

A geradlinig um die Wegstrecke s_1 und von hier aus wieder geradlinig um die Wegstrecke s_2 nach B bewegen, so erfordert das dieselbe Arbeit, die erforderlich ist zur Bewegung von M nach P und von hier aus nach Q, denn MP ist die Projektion von s_1 und PQ die Projektion von s_2 auf die Kraftrichtung.

Wenn wir nun denselben Körper von M aus direkt nach B bewegen, so ist dazu dieselbe Arbeit erforderlich, wie zur Bewegung von M in der Kraftrichtung nach Q. Es ist also dieselbe Arbeit zur Bewegung des Körpers M über A nach B erforderlich, wie zur Bewegung auf dem direkten geradlinigen Wege von M nach B. Diese Tat-

sache läßt sich sofort verallgemeinern. Auch zur Bewegung des Körpers längs des gebrochenen Weges *MCDB*, wie auch längs des krummen Weges *MEB*, den man sich aus sehr vielen kleinen geradlinigen Wegstrecken zusammengesetzt denken kann, ist dieselbe Arbeit erforderlich. Das heißt also: Die Größe der Arbeit, die zur Bewegung eines Körpers erforderlich ist, ist nur abhängig von der Anfangs- und Endlage des Körpers, aber unabhängig von der Form des Weges.

Diesem Satze kann man auch die Form geben: Führt man einen Körper auf geschlossener Bahn von einem Punkte nach demselben Punkte zurück, so ist der gesamte Arbeitsaufwand gleich Null. Das ist so zu erklären, daß die zu einem Teile des Weges erforderliche und aufgewandte Arbeit auf dem anderen Teile des zum Anfangspunkte zurückführenden Weges wieder gewonnen wird.

§ 5. Kräfte, deren Größe dem Quadrat der Entfernung zweier aufeinander wirkender Körper umgekehrt proportional ist.

Von allen wirkenden Kräften sind in der Natur diejenigen am wichtigsten, bei denen zwei Körper aufeinander mit einer Kraft einwirken, die dem Quadrat der Entfernung der Körper voneinander umgekehrt proportional ist, und die in der Richtung der Verbindungslinie der Körper wirkt. Solche Kräfte sind die Gravitation, sowie die magnetische und die elektrische Anziehung und Abstoßung. Es ist hierbei jedoch zu beachten, daß von dieser Gesetzmäßigkeit einstweilen nur unter der Voraussetzung gesprochen wird, daß die räumlichen Dimensionen der aufeinander wirkenden Körper im Vergleich zu ihrer gegenseitigen Entfernung vernachlässigt werden können. Es werden daher vorläufig die aufeinander wirkenden Körper als punktförmig angesehen; oder es wird die Kraftwirkung eines Körpers auf einen anderen als von einem bestimmten Punkte dieses Körpers ausgehend angenommen, welcher Punkt dann als der Repräsentant des ganzen Körpers betrachtet wird.

Für die Kräfte, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ihrer Angriffspunkte wirken, nimmt

der Ausdruck für die zur Bewegung eines Körpers in dem Kraftfelde nötige Arbeit einen besonderen Wert an, welcher wegen seiner allgemeinen Gültigkeit für alle diese Kräfte allgemein entwickelt werden soll:

Es seien (Fig. 6) M und B zwei Körper, welche die Entfernung R voneinander haben, und welche aufeinander

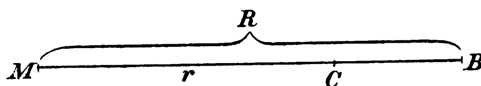


Fig. 6.

mit einer Kraft einwirken, die in der Richtung ihrer Verbindungslinie wirkt, und deren Größe dem Ausdrucke $\frac{1}{R^2}$ proportional sein soll. Die Kraft läßt sich demnach ausdrücken durch:

$$K = \frac{P}{R^2},$$

wo P eine Funktion ist, die wohl von der Art der Körper, nicht aber von R abhängig sein soll, die also in bezug auf R konstant ist.

Es werde nun der Körper B dem Körper M in der geradlinigen Richtung auf M zu bis zum Punkte C genähert, wobei $MC = r$ gesetzt wird. Die zu dieser Annäherung erforderliche Arbeit soll berechnet werden. Die Arbeit wird durch das Produkt aus Kraft und Weg gemessen. Wenn die zwischen den beiden Körpern wirkende Kraft konstant bliebe, würde also die Arbeit durch den Ausdruck $\frac{P}{R^2}(R - r)$ bestimmt sein. In Wirklichkeit ist aber bei der Bewegung des Körpers B nach C die Kraft auf die Größe $\frac{P}{r^2}$ angewachsen. Wäre letzter Ausdruck die auf der ganzen Wegstrecke wirkende Kraftgröße, so lautete der Ausdruck für die aufgewandte Arbeit $\frac{P}{r^2}(R - r)$. Hieraus folgt, daß der zu berechnende wirkliche Wert A

der Arbeit zwischen den beiden Grenzen liegt, daß also die Ungleichung besteht:

$$\frac{P}{R^2}(R-r) < A < \frac{P}{r^2}(R-r),$$

welche sich umformen läßt in:

$$\frac{r}{R} < A\frac{1}{P}\frac{Rr}{R-r} < \frac{R}{r}.$$

Die beiden auf der linken und rechten Seite stehenden Grenzen sind das Verhältnis der beiden Entfernungen des bewegten Körpers von dem feststehenden M. Diese Grenzen nähern sich um so mehr dem Werte „Eins“, je weniger die beiden Werte R und r voneinander verschieden sind. Wenn wir demnach vorläufig annehmen, daß die Verschiebung des beweglichen Körpers nur längs einer unendlich kleinen Wegstrecke geschehen soll, und wenn wir den dann zu berechnenden Arbeitswert A' nennen wollen, so ergibt sich:

$$A'\frac{1}{P}\frac{Rr}{R-r} = 1,$$

woraus folgt:

$$A' = P\frac{R-r}{Rr} = P\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right).$$

Dehnen wir nun die Berechnung des Arbeitswertes A auf den Fall aus, daß die Strecke BC endlich ist, so können wir diese Strecke in eine große Zahl verschwindend kleiner Wegstrecken zerlegen und können den Körper diese kleinen Abschnitte einzeln nacheinander durchlaufen lassen. Für jeden der kleinen Abschnitte gilt der oben berechnete Arbeitswert A'. Sind die Entfernungen des bewegten Körpers von M der Reihe nach $R, r_1, r_2 \ldots r$, so sind die für die einzelnen Bewegungen erforderlichen Arbeitswerte nach oben entwickelter Formel:

$$P\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{R}\right), \quad P\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right), \ldots \quad P\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_n}\right).$$

Die zur Bewegung des Körpers längs der ganzen Strecke BC erforderliche Arbeit ist gleich der Summe der Einzelarbeiten. Hieraus folgt:

$$A = P\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R}\right) + P\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) + \ldots + P\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$$
$$= P\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \ldots + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right)$$
$$= P\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Resultat: Wenn die zwischen zwei Körpern nur in der Richtung der Verbindungslinie der Körper wirkende Kraft durch den Ausdruck $\frac{P}{r^2}$ bestimmt ist, so ist zur Annäherung eines der Körper an den anderen aus der Entfernung R in die Entfernung r die Arbeit erforderlich:

$$A = P\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \tag{3}$$

Anmerkung: Mit Hilfe der Infinitesimalrechnung hätte sich dieses Resultat einfacher ergeben.

Wird der Körper B (Fig. 7) um die Strecke $-dr$

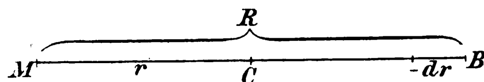


Fig. 7.

entgegen der Kraft $\frac{P}{r^2}$ bewegt, so ist die erforderliche Elementararbeit $dA = \frac{P}{r^2}(-dr)$. Hieraus folgt durch Integration $A = \int \frac{-P}{r^2} dr$, und da nach der Voraussetzung P von r unabhängig ist, $A = P\int \frac{-dr}{r^2}$. Für die Bewegung aus der Entfernung R in die Entfernung r ergeben sich die Integrationsgrenzen R und r, also ist:

$$A = P\int_R^r - \frac{dr}{r^2} = P\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \tag{3a}$$

§ 6. Die Funktion *P*.

Bei den Fernkräften sind die aufeinander wirkenden Körper gleichzeitig auch die Ausgangspunkte der Kräfte selbst, es hängt also die oben eingeführte Funktion P von den aufeinander wirkenden Körpern ab. Ohne besondere Voraussetzung über die Kraftart, ob Gravitation, ob elektrische oder magnetische Kraft, zu machen, wollen wir nur voraussetzen, daß die Kraft eine Veränderung der Entfernung der Körper voneinander herzustellen strebt. Wir wollen ferner keinerlei Voraussetzung darüber machen, ob der zwischen den Körpern befindliche Raum oder der den Raum etwa erfüllende Stoff durch die Kraft beeinflußt wird, oder ob dieser Stoff erst eine Übertragung der Kraft vermittelt, ob also die in Frage kommende Kraft eine Fernkraft im eigentlichen Sinne des Wortes ist.

Wenn der Körper M Träger einer Kraft ist, welche er gegenüber einem Körper M_1 äußert, so erfordert das Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion, daß auch M_1 der Träger einer ebenso großen Kraft ist, welche er dem Körper M gegenüber äußert, denn wenn man durch eine starre Verbindung von M und M_1 verhindert, daß die Kraft $M \rightarrow M_1$ und die Kraft $M \leftarrow M_1$ die gegenseitige Entfernung von M und M_1 verändern, so muß nach unserer Voraussetzung, daß die wirkenden Kräfte nur eine Veränderung der Entfernung bewirken können, Gleichgewicht zwischen den Kräften $M \rightarrow M_1$ und $M \leftarrow M_1$ bestehen, d. h. die beiden Kräfte müssen dem absoluten Werte nach gleich sein.

Wir wollen nun den Körper M an einer Stelle im Raume festhalten und ihm in einer bestimmten Entfernung den Körper M_1 gegenüberstellen. Die jetzt von M auf M_1 wirkende Kraft sei K. Ersetzen wir dann, ohne M zu ändern, den Körper M_1 an seiner Stelle durch einen anderen M_2, auf welchen M mit genau derselben Kraft wirkt, so ist es berechtigt, die beiden Körper M_1 und M_2 in bezug auf die Kraftwirkung gleich zu nennen. In derselben Weise können wir M_1 durch die Körper M_3, M_4 usw. ersetzen, welche gleich sind in bezug auf ihre Kraftwirkung, wenn M auf sie mit derselben Kraft wirkt. So können wir eine größere Anzahl von Einzelkörpern bestimmen, die alle

in bezug auf die betrachtete Kraftwirkung gleich sind. Ob die Körper sonst in ihren Eigenschaften, also in der Form, Farbe oder dergl. übereinstimmen, sei gleichgültig. Wir wollen einen Körper, insofern wir seine Kraftwirkung auf einen anderen im oben auseinandergesetzten Sinne betrachten, ein „Agens" nennen. Es sind also M_1, M_2, M_3 usw. gleiche Agentien, wenn M auf sie mit derselben Kraft wirkt. Wir können das Agens sowohl den einzelnen Punkten eines Raumes, wie denen einer Fläche zuordnen. Im ersten Falle reden wir von einer räumlichen, im zweiten von einer flächenartigen Verteilung des Agens.

Es ist gleichgültig, wie groß wir das der obigen Betrachtung zugrunde gelegte ursprüngliche Agens M_1 wählen, oder welche Zahl wir demselben zuordnen. Wir können irgend ein beliebiges Agens als Einheit wählen und uns nach dem beschriebenen Verfahren beliebig viele solcher Einheiten herstellen. Als letzte Voraussetzung wollen wir noch die machen, daß die beiden Agentien M_1 und M_2 und ebenso jede zwei andere Agentien sich in ihrer Wirkung auf M nicht gegenseitig stören, wenn sie gleichzeitig von derselben Stelle des Raumes wirken, sondern daß jedes unabhängig von dem anderen mit der ihm zukommenden Kraft auf M wirkt. Dann ergibt sich das Resultat, daß das Agens „zwei" eine doppelt so große Kraft auf M ausübt, wie das Agens „eins". Ebenso wirkt das Agens $n \cdot M_1$ mit der n-fachen Kraft, wie das Agens M_1 allein auf M.

Wenn man nun in derselben Weise das Agens M durch das Agens $2M$, $3M$ oder allgemein qM ersetzt, und hierfür dieselbe Voraussetzung macht, wie für die Agentien M_1, M_2 usw., so muß auch mit Vervielfältigung von M eine ebenso große Vervielfältigung der auf die Massen M_1 wirkenden Kraft eintreten.

Hieraus folgt, daß die von dem Agens qM auf das Agens nM_1 wirkende Kraft qn mal so groß sein muß, wie die von M auf M_1 wirkende Kraft. Es liegt nun ganz in unserer Willkür, irgend ein Agens als Einheit zugrunde zu legen, aber es empfiehlt sich, für beide Agentien M und M_1 dieselbe Einheit zu benutzen. Mit dieser willkürlichen Einheit gemessen, mögen in der Folge die Buchstaben m und m_1 das m- bzw. das m_1-fache der Einheit bedeuten. Wir können dann behaupten, daß die Kraft, mit der die

Agentien m und m_1 aufeinander einwirken, $m m_1$ mal so groß ist, wie die von den Einheiten von denselben Punkten aus aufeinander ausgeübte Kraft. Hieraus folgt endlich, daß die Funktion P sich durch den Ausdruck

$$P = f \cdot m m_1$$

bestimmen läßt, wo f noch ein von der Wahl der Einheiten für die Agentien, für die Entfernung und für die Kraft abhängiger, sonst aber konstanter Faktor ist.

Führen wir den eben abgeleiteten Wert der Funktion P in die früher abgeleiteten Formeln für die Kraft K und die Arbeit A ein, so erhalten wir:

$$K = f \cdot \frac{m m_1}{r^2}, \tag{4}$$

$$A = f \cdot m m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \tag{5}$$

§ 7. Das Potential.

Der Wert für die Arbeit A erhält einen besonders einfachen Ausdruck, wenn wir die Entfernung $R = \infty$ setzen, wenn also $\frac{1}{R} = 0$ wird. Er reduziert sich auf $A = f \cdot \frac{m m_1}{r}$. Betrachten wir ferner den besonderen Fall, daß der bewegte Körper M_1 die Einheit des Agens enthalte, so daß also $m_1 = 1$ wird, so vereinfacht sich der Ausdruck noch weiter auf $A = f \cdot \frac{m}{r}$. Dieser Ausdruck wird mit dem Namen Potential bezeichnet. Wir wollen ihn in der Folge durch den Buchstaben V ausdrücken, also schreiben:

$$V = f \cdot \frac{m}{r}. \tag{1}$$

Auf Grund der Auseinandersetzungen können wir nun definieren: Das Potential $\left(V = f \cdot \frac{m}{r}\right)$ ist die Arbeit, die geleistet werden muß, um das Agens „Eins" dem Agens m aus dem Unendlichen bis auf die Entfernung r zu nähern.

Es war eben vorausgesetzt, daß das Agens m punktförmig sei. Nach den Auseinandersetzungen des § 6 ergibt

sich aber, wenn wir statt des einen Agens m noch ein zweites m' haben, daß jedes einzelne von ihnen die Einheit des Agens beeinflußt, so daß man sowohl von dem Potential eines Punktes im Kraftfelde von m, wie auch von dem Potential eines Punktes im Kraftfelde von m' reden kann. Soll nun das Potential des Punktes in dem den beiden Agentien m und m' gemeinsamen Kraftfelde bestimmt werden, so machen wir von der früher abgeleiteten Tatsache Gebrauch, daß die zur Bewegung eines Körpers, der von zwei Kräften beeinflußt ist, erforderliche Arbeit gleich ist der Summe der Einzelarbeiten, die erforderlich wären, um den Körper im Felde jeder einzelnen Kraft um dieselbe Wegstrecke zu bewegen. Es ist also auch das Potential eines von zwei Agentien beeinflußten Punktes gleich der Summe der von den einzelnen Agentien herrührenden Potentiale. Es ergibt sich daher als Potential des Punktes P (Fig. 8), der von den Agentien m und m' die Entfernungen r und r' hat, der Wert

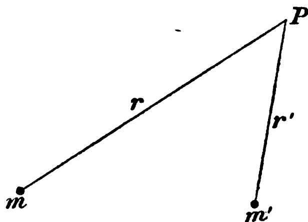


Fig. 8.

$$V = f \cdot \frac{m}{r} + f \cdot \frac{m'}{r'} .$$

Diese Eigenschaft läßt sich für beliebig viele Agentien verallgemeinern:

Das Potential eines Punktes, der sich im Kraftfelde der Agentien $m, m', m'' \ldots$ befindet, und der von diesen Agentien die Abstände $r, r', r'' \ldots$ hat, ist gleich der Summe der Einzelpotentiale:

(2) $$V = f \sum \frac{m}{r} .$$

Für den Fall, daß die einzelnen Agentien nicht einzelnen Punkten zugeordnet sind, sondern einen Raum oder eine Fläche stetig erfüllen, geht der Summenausdruck in das Integral über:

(3) $$V = f \int \frac{m}{r} ,$$

wobei die Integrationsgrenzen durch die Begrenzung des von dem Agens eingenommenen Raumes bestimmt sind.

§ 8. Das Potential einer gleichmäßig mit Agens belegten Kugelschale in einem äußeren Punkte.

Für den Fall, daß das Agens in unendlich dünner Schicht auf einer Kugeloberfläche gleichmäßig verteilt ist, daß also das Agens mit einer unendlich dünnen Kugelschale zu vergleichen ist, ist die Berechnung des Potentials eines Punktes elementar durchführbar.

Es möge die auf die Flächeneinheit der Kugelschale entfallende Menge des Agens mit dem Namen „Flächendichte“ bezeichnet werden. Die Größe derselben sei ϱ. Ist der Radius der Kugelschale R, also die Gesamtoberfläche $4\pi R^2$, so ist die gesamte Menge des auf der Kugelschale befindlichen Agens $m = 4\pi R^2 \cdot \varrho$.

In Figur 9 stelle der Kreis mit dem Mittelpunkte O die Kugelschale dar. In der Entfernung a vom Kugel-

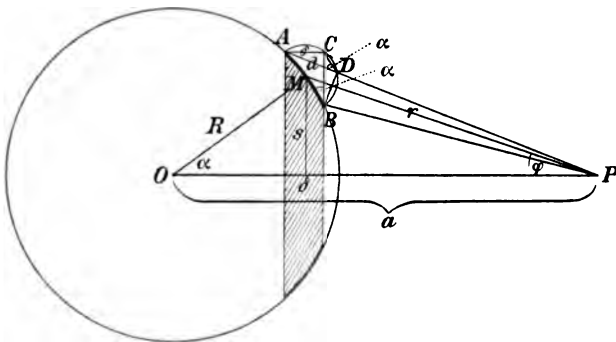


Fig. 9.

mittelpunkte befinde sich außerhalb der Kugeloberfläche der punktförmige Körper P, der die Einheit des Agens enthalten möge. Um das Potential des Punktes P, auf den die Kugelschale wirkt, zu bestimmen, können wir uns die Kugelschale in eine große Anzahl sehr kleiner Teile zerlegt denken und für jeden der Teile das Potential des Punktes P nach der Formel $V = f \cdot \frac{m}{r}$ berechnen. Wir brauchen dann nur noch die Einzelpotentiale zu addieren, um das Gesamtpotential zu erhalten.

Die Zerlegung der Kugelschale geschehe in folgender Weise:

Durch eine große Zahl von Ebenen, die alle zu der Verbindungslinie OP senkrecht stehen, werde die Kugelschale in Kugelzonen zerlegt. Eine der Kugelzonen ist in Figur 9 (in übertriebener Breite) durch Schraffierung hervorgehoben. Die Höhe der Kugelzone sei mit δ und die Entfernung eines Punktes M derselben von P mit r bezeichnet. Ist endlich der in der Ebene der Zone gemessene Radius derselben s, so ergibt sich, daß die Gesamtmenge des auf dieser Zone liegenden Agens $m' = 2\pi s \cdot \frac{\delta}{\sin\alpha}\varrho$ beträgt, wenn noch mit α der Winkel bezeichnet wird, den der zu der Zone führende Kugelradius mit OP bildet.

Da die Entfernung des Punktes P von allen Punkten der Kugelzone gleich groß, nämlich gleich r ist, so folgt für das durch die Zone im Punkte P erzeugte Potential der Wert:

$$V' = f \cdot \frac{m'}{r} = f \cdot \frac{2\pi s \cdot \delta \cdot \varrho}{r \cdot \sin\alpha}.$$

Da $\frac{s}{\sin\alpha} = R$ ist, so können wir auch schreiben:

$$V' = f \cdot 2\pi R\varrho \cdot \frac{\delta}{r}.$$

Um endlich das von der ganzen Kugelschale herrührende Potential des Punktes P zu berechnen, müssen wir die Einzelpotentiale addieren und erhalten so als Gesamtpotential:

$$V = \sum f \cdot 2\pi R\varrho \frac{\delta}{r} = f \cdot 2\pi R\varrho \sum \frac{\delta}{r}.$$

Ziehen wir noch die in Figur 9 gezeichneten Hilfslinien PA und PB, fällen das Lot $BD \perp AP$, ziehen $AC \parallel OP$, dann $BC \perp AC$, und nennen wir den Winkel, den r mit OP bildet, φ, so ergibt sich, daß der über AB als Durchmesser konstruierte Halbkreis durch die beiden Punkte C und D gehen muß, weil diese Punkte die Scheitelpunkte der rechten Winkel ACB und ADB sind; es ist also $\sphericalangle ADC = ABC$ als Peripheriewinkel über AC. Nun ist aber $\sphericalangle ABC = \alpha$, weil die Schenkel der Winkel senkrecht

aufeinander stehen, folglich ist auch $\sphericalangle ADC = \alpha$. Ferner ist $\sphericalangle CAD = \varphi$, da $AC \parallel OP$ ist, daraus ergibt sich endlich, daß $\triangle ACD \sim OMP$ ist. Nennen wir nun noch die Differenz der beiden Entfernungen $AP - BP = d$, so folgt die Proportion $\delta : d = r : a$, oder

$$\frac{\delta}{r} = \frac{d}{a}.$$

Diesen Wert setzen wir in den Ausdruck für das Gesamtpotential ein und erhalten

$$V = f \cdot 2\pi R\varrho \sum \frac{d}{a} = f \cdot \frac{2\pi R\varrho}{a} \sum d.$$

Es ist also nur noch die Summe Σd auszuführen für die ganze Kugeloberfläche. Da d die Differenz zweier aufeinander folgender Werte für r ist, so ergibt sich als ganze Summe der Differenzen der Differenzwert des größten und kleinsten Wertes von r, also die Differenz $a + R - (a - R) = 2R$, also ist $\Sigma d = 2R$. Dieses in den Wert für V eingesetzt, ergibt endlich

$$V = f \cdot \frac{4\pi R^2 \varrho}{a}.$$

$4\pi R^2 \varrho$ ist die Gesamtmenge m des auf der Kugelschale befindlichen Agens. Unter Einführung von m erhält man

$$V = f \cdot \frac{m}{a}.$$

Denselben Wert für V würde man auch erhalten, wenn die Gesamtmenge des Agens im Kugelmittelpunkte vereinigt wäre.

Daraus folgt: Das Potential eines außerhalb einer Kugel liegenden Punktes, der beeinflußt wird von einer auf einer Kugelschale gleichmäßig verteilten Agensmenge ist gleich dem Potential desselben Punktes, wenn das Agens im Mittelpunkte der Kugel vereinigt ist.

Hieraus folgt aber auch, daß die Kraftwirkung einer homogen belegten Kugelschale auf einen außerhalb der Kugel liegenden Punkt ersetzt werden kann durch die Kraftwirkung der im Mittelpunkte der Kugel vereinigten Agensmenge.

§ 9. Das Potential einer gleichmäßig mit Agens belegten Kugelschale in einem inneren Punkte.

Für einen innerhalb der gleichmäßig mit Agens belegten Kugelschale liegenden Punkt erfolgt die Berechnung des Potentials in ganz ähnlicher Weise.

Es möge in Figur 10 der große Kreis wieder die Kugelschale mit dem Mittelpunkte O darstellen, innerhalb dessen der Punkt P in einem Abstande $OP = a$ vom Kugelmittelpunkte liegt. Die Kugelschale wird durch eine große Anzahl senkrecht zu OP gelegter Ebenen wieder in schmale Kugelzonen zerlegt, von denen eine (in übertriebener Breite gezeichnete) durch Schraffierung hervorgehoben ist. Die Höhe der Zone sei δ, AB sei der äußere Rand der Zone, dessen Mitte M mit O und P verbunden werde ($\sphericalangle MOP = \alpha$, $OM = R$, $PM = r$), außerdem werden A und B mit M verbunden; s sei der in der Ebene der Zone liegende Radius derselben. Ferner ziehe man die Hilfslinien $AC \parallel OP$, $BC \perp AC$, $BD \perp PM$ und verbinde D mit C, dann läßt sich ähnlich, wie in Figur 5 mit dem Durchmesser AB der Kreis zeichnen, der durch die Scheitel C und D zweier rechten Winkel geht, so daß also $\sphericalangle ADC = ABC$ als Peripheriewinkel sind, und da $\sphericalangle ABC = \alpha$, folgt auch, daß $\sphericalangle ADC = \alpha$. Ist $\sphericalangle OPM = \varphi$, so ist auch $\sphericalangle DAC = \varphi$ als Winkel mit parallelen Schenkeln, folglich ist $\triangle ADC \sim OPM$. Unter Einführung der Werte $AD = d$ (Differenz zweier benachbarter Werte von r), $AC = \delta$ (Höhe der Zone), $OP = a$, $PM = r$ gilt dann die Proportion

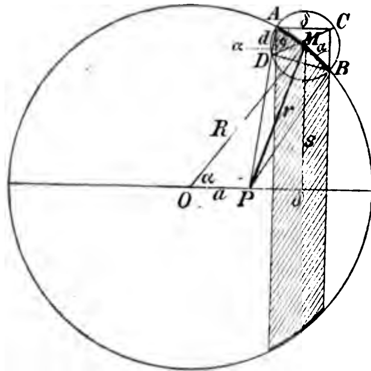


Fig. 10.

$$\delta : d = r : a \quad \text{oder} \quad \frac{\delta}{r} = \frac{d}{a}.$$

Das Potential von P, erzeugt durch die Wirkung der schmalen Kugelzone, ergibt sich wie vorhin zu

$$V' = f \cdot \frac{m'}{r} = f \cdot \frac{2\pi s \delta \varrho}{r \sin\alpha} = f \cdot 2\pi R \varrho \frac{\delta}{r},$$

und unter Benutzung der vorigen Proportion

$$V' = f \cdot 2\pi R \varrho \cdot \frac{d}{a}.$$

Auf die ganze Kugeloberfläche ausgedehnt lautet das Gesamtpotential

$$V = \sum V' = f \cdot \frac{2\pi R \varrho}{a} \sum d.$$

Der Summenausdruck ist die Summe aller Differenzen zwischen dem größten und dem kleinsten Wert von r, also gleich der Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert von r selbst, so daß

$$\Sigma d = R + a - (R - a) = 2a.$$

Setzen wir diesen Wert in die Formel für V ein, so erhalten wir schließlich

$$V = \frac{f \cdot 2\pi R \varrho}{a} \cdot 2a = f \cdot \frac{4\pi R^2 \varrho}{R}.$$

Da aber $4\pi R^2 \varrho$ gleich der gesamten Agensmenge m ist, die sich auf der Kugelschale befindet, so kann man noch setzen

$$V = f \cdot \frac{m}{R}.$$

Dieser Wert ist völlig unabhängig von a, also auch von der Lage des Punktes P innerhalb der Kugel. Derselbe Wert würde sich auch ergeben, wenn die gesamte Agensmenge im Mittelpunkte der Kugel vereinigt würde und nun auf einen Punkt der Kugeloberfläche wirkte, für die dann das Potential zu berechnen wäre.

Resultat: Das Potential eines innerhalb einer mit Agens gleichmäßig belegten Kugelschale liegenden Punktes ist konstant und gleich dem Potential eines Punktes der Kugelschale selbst, die

von der im Kugelmittelpunkte vereinigt gedachten Agensmenge beeinflußt wird.

Aus diesem Resultat läßt sich dann sofort auf die Größe der im Innern der Kugel wirkenden Kraft schließen. Wenn man nämlich den Punkt P von einem Punkte nach einem beliebigen anderen im Kugelinnern verschiebt, so bleibt das Potential unverändert. Das Potential ist nach unserer Definition die Arbeit, die geleistet werden muß, um einen von der Kraft beeinflußten Körper von der Agensmenge „eins" aus dem Unendlichen an den betreffenden Punkt zu bringen. Haben also zwei Punkte dasselbe Potential, so kann zum Bewegen der Agensmenge von einem zum anderen keine Arbeit geleistet werden. Die Arbeit ist das Produkt von Kraft und Weg. Bleibt aber bei endlichem Werte des Weges die Arbeit gleich Null, so kann nur der andere Faktor des Produktes, nämlich die Kraft selbst gleich Null sein.

Hieraus folgt, daß ein auf einer Kugelschale gleichmäßig verteilte Agensmenge auf das Innere der Kugel keine Kraftwirkung ausüben kann, vielmehr würde eine im Innern der Kugelschale liegende Agensmenge „eins", also auch jede andere an jeder Stelle des Kugelinnern im Gleichgewicht schweben.

§ 10. Anziehung einer homogen belegten Kugelschale auf einen inneren Punkt.

Aus der Konstanz des Potentials innerhalb einer homogen belegten Kugelschale haben wir schon den Schluß gezogen, daß die Anziehung, die ein innerhalb der Kugelschale liegender Punkt erfährt, gleich Null ist. Trotzdem wollen wir den Nachweis dafür noch einmal direkt aus dem Gesetze $K = f \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$ führen, da diese Ableitung für spätere Schlußfolgerungen von Bedeutung ist.

Es möge in Figur 11 durch den Kreis die homogen belegte Kugelschale mit der Flächendichte ϱ dargestellt werden, innerhalb welcher der Punkt P, der mit der Einheit des Agens belegt sein möge, liegt. Wir schneiden nun durch einen schmalen Doppelkegel, der seinen Scheitel in P hat, aus der

Kugelschale zwei kleine Flächenstücke s_1 und s_2 heraus. Ist der Abstand des Flächenstückes s_1 von P gleich r_1 und ebenso der Abstand des Flächenstückes s_2 von P gleich r_2, so beträgt die Anziehung oder Abstoßung, die der Punkt P von s_1 aus erfährt, gleich $f \cdot \frac{\varrho s_1}{r_1^2}$, denn da das Flächenstück die Größe s_1 hat und da die auf der Flächeneinheit entfallende Agensmenge den Betrag ϱ hat, so ist die auf das Flächenstück s_1 entfallende Agensmenge ϱs_1. Ebenso ist die Anziehung, die das Flächenstück s_2 auf P ausübt, gleich $f \cdot \frac{\varrho s_2}{r_2^2}$. Die Folge dieser beiden Anziehungen ist die Resultierende

$$R = f\varrho\left(\frac{s_1}{r_1^2} - \frac{s_2}{r_2^2}\right).$$

Wir konstruieren nun noch um P eine Kugelfläche, welche durch den Mittelpunkt der kleinen Fläche s_1 geht und aus welcher der Doppelkegel die Fläche σ_1 ausschneiden möge. Ebenso schneidet der Doppelkegel aus einer um P durch den Mittelpunkt der Fläche s_2 konstruierten Kugel die Fläche σ_2 heraus. Verbinden wir die beiden Mitten von s_1 und s_2 miteinander und mit dem Mittelpunkt O der Kugelschale, so ergibt sich, daß die beiden von O ausgehenden Radien mit der Verbindungslinie von $s_1 s_2$ denselben Winkel α einschließen. Ferner ist einzusehen, daß auch die beiden Flächenstücke s_1 und σ_1 und ebenso s_2 und σ_2 miteinander denselben Winkel α einschließen, da die Flächen auf den Schenkeln der Winkel α senkrecht stehen. Folglich ist

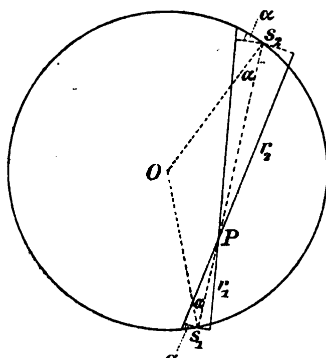


Fig. 11.

$$s_1 = \frac{\sigma_1}{\cos\alpha} \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{\sigma_2}{\cos\alpha}.$$

Setzen wir diese Werte in den Wert für die Resultierende ein, so ergibt sich hieraus der Wert

$$R = f\varrho\left(\frac{\sigma_1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{r_1^2} - \frac{\sigma_2}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{r_2^2}\right)$$

$$= \frac{f\varrho}{\cos\alpha}\left(\frac{\sigma_1}{r_1^2} - \frac{\sigma_2}{r_2^2}\right).$$

Nun verhält sich aber $\sigma_1 : \sigma_2 = r_1^2 : r_2^2$ aus geometrischen Gründen, also ist $\frac{\sigma_1}{r_1^2} - \frac{\sigma_2}{r_2^2} = 0$, woraus folgt

$$R = 0.$$

Die beiden mit Agens belegten Flächenstücke s_1 und s_2 liefern also keinen Beitrag zur Anziehung des Punktes P. Zerlegen wir die gesamte Kugelschale durch eine große Zahl solcher durch P gehender Doppelkegel oder Doppelpyramiden, so sehen wir, daß die gesamte Kugelschale sich in zwei Gruppen teilen läßt, die ebenso zueinander liegen, wie s_1 zu s_2. Diese beiden Gruppen heben sich daher in ihren Kraftwirkungen auf P vollständig auf. Das heißt: „Eine mit Agens homogen belegte Kugelschale übt auf einen im Innern liegenden Punkt keine Kraftwirkung aus."

§ 11. Anziehung eines unendlich dünnen homogenen Körpers, der von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden begrenzt ist, auf einen inneren Punkt.

Die beiden in Figur 12 dargestellten Ellipsen mögen die Durchschnittsfiguren zweier ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoide mit der Papierebene darstellen. P sei ein Punkt im inneren Hohlraume des schalenförmigen homogenen Körpers, der von den beiden Ellipsoiden begrenzt ist. Die Schale sei von dem Agens vollständig erfüllt, es entfalle auf die Raumeinheit die Agensmenge ϱ. Wir nennen diese Agensmenge ϱ die Raumdichte des Agens.

Die analytische Geometrie lehrt, daß von einer geraden Linie, die von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden geschnitten wird, die Abschnitte, welche zwischen den beiden Ellipsoiden liegen, gleich groß sind. Wenn

man also durch den Punkt P eine Gerade AG legt, welche zwischen den Ellipsoiden die Abschnitte AD und GF hat, so ist $AD = GF$. Diese beiden Abschnitte mögen h heißen. Es möge nun durch P eine Doppelpyramide gelegt werden, welche aus der ellipsoidischen Schale die beiden Körper $ABCD$ und $EFGH$ ausschneidet. Legen wir nun noch Kugelflächen, welche den Mittelpunkt P haben, und welche durch A, D, E und H gehen, so können wir, wenn wir die durch P gelegte Doppelpyramide nur genügend schmal nehmen, behaupten, daß der Körper $ELMH$ nur unendlich wenig von $EFGH$ verschieden ist, und ebenso, daß auch der Unterschied zwischen $ABCD$ und $AIKD$ unendlich klein ist.

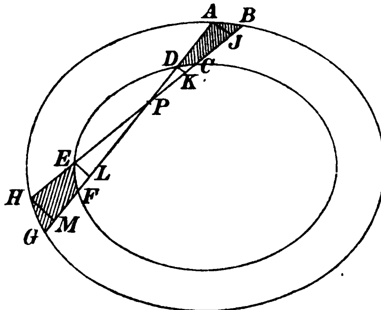


Fig. 12.

Wenn wir daher die Kraftwirkung der in $ABCD$ und in $EFGH$ vorhandenen Agensmenge auf eine in P befindliche Agenseinheit berechnen wollen, so können wir statt deren die in $AIKD$ und $ELMH$ vorhandene Agensmenge betrachten, wenn in ihnen die Agensdichte ϱ wäre. Dann beträgt die Anziehung, die P nach der einen Seite erfährt,

$$f \cdot \frac{AIKD \cdot \varrho}{PK^2},$$

und die nach der anderen Seite

$$f \cdot \frac{ELMH \cdot \varrho}{PE^2}.$$

Hierbei ist wohl zu beachten, daß die Figur die wirklichen Verhältnisse in übertrieben großer Verzerrung zeigt. Nun können wir die Volumina $AIKD$ und $ELMH$ bestimmen. Wir können beide ansehen als schmale Prismen mit den Grundflächen DK und EL und den gleichen Höhen

$AD = EH = h$, so daß sich also die resultierende Kraftwirkung auf P ergibt zu

$$R = f \cdot \frac{DK \cdot h \cdot \varrho}{PK^2} - f \cdot \frac{EL \cdot h \cdot \varrho}{PE^2}$$
$$= f \cdot h \cdot \varrho \left(\frac{DK}{PK^2} - \frac{EL}{PE^2} \right).$$

Bedenken wir aber, daß aus geometrischen Gründen

$$\frac{DK}{PK^2} = \frac{EL}{PE^2}$$

ist, so folgt

$$R = 0.$$

Wir können nun die ganze ellipsoidische Schale durch Doppelpyramiden mit dem gemeinsamen Scheitel P in zwei Gruppen von Körpern zerlegen, deren gemeinsame Anziehung gleich Null ist. Daraus ergibt sich aber, daß der mit der Agenseinheit belegte Punkt P überhaupt keine Kraftwirkung erfährt. Also:

Ein Agens im Innern einer ellipsoidischen, homogen mit Agens erfüllten Schale, die von ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden begrenzt wird, erfährt durch das Agens keinerlei Kraftwirkung.

§ 12. Das Potential einer Vollkugel.

Es folgt aus §§ 8, 9 und 10 leicht die Berechnung des Potentials eines Punktes, der von einer mit Agens erfüllten Vollkugel beeinflußt ist, wenn die Vollkugel entweder ganz homogen mit Agens erfüllt ist oder aus konzentrischen Schichten besteht, deren jede einzelne homogen mit Agens erfüllt ist, wenn auch die Belegung der einen Schicht von der einer anderen abweicht, indem wir uns die Vollkugel in eine große Zahl von Kugelschalen zerlegt denken, für welche jede einzelne die obigen Überlegungen ausführbar sind.

Für einen Punkt außerhalb der Vollkugel ist das Potential gleich der Summe der Potentiale der einzelnen Kugelschalen, und da wir uns das Agens jeder einzelnen

Kugelschale, ohne an dem Potentialwert etwas zu ändern, im Mittelpunkte vereinigt denken können, so ist auch das Potential der ganzen Vollkugel gleich

$$V_a = f \cdot \frac{m}{r}.$$

Der Index a soll angeben, daß der untersuchte Punkt außerhalb der Kugel liegt.

Es bedeutet in diesem Ausdrucke m die gesamte Agensmenge der Vollkugel und r den Abstand des betrachteten Punktes vom Kugelmittelpunkte.

Um die Masse m aus der Dichte ϱ zu berechnen, müssen wir die Zerlegung der Kugel in konzentrische Schichten wirklich ausgeführt denken. Es möge der Radius einer solchen Schicht x sein, so daß also ihre Oberfläche $4\pi x^2$ ist. Beträgt die Dicke der Schicht Δx, so ist das Volumen $4\pi x^2 \Delta x$, also die Masse der Schicht

$$m' = 4\pi x^2 \Delta x \cdot \varrho.$$

Die Gesamtmasse m des Agens wird durch Summation der Massen der einzelnen Schichten gefunden, also beträgt sie

$$m = \Sigma 4\pi x^2 \Delta x \cdot \varrho = 4\pi \Sigma x^2 \Delta x \cdot \varrho.$$

Hierin ist die Summation für die Grenzen von $x = 0$ bis $x = a$ zu bilden, wenn a den Radius der Kugel bedeutet. Für den Fall, daß die Dichte ϱ eine stetige Funktion des Radius x ist, wird hieraus

$$m = 4\pi \int_0^a \varrho x^2 \, dx,$$

folglich wird das Potential

$$V_a = \frac{4\pi f}{r} \int_0^a \varrho x^2 \, dx. \tag{1}$$

Für einen Punkt P im Innern der Vollkugel müssen wir uns dieselbe nach Figur 13 in zwei Teile zerlegt denken, indem wir um den Mittelpunkt M die Kugelfläche, welche durch den untersuchten Punkt P geht, konstruieren. Dadurch zerfällt die ganze Kugel in die Kugel mit dem Radius a

(gleich dem Abstande des untersuchten Punktes) und in eine Kugelschale mit dem inneren Radius a und dem äußeren Radius r.

Für die Kugel mit dem Radius a ist P ein äußerer Punkt, also ist sein Potential nach Gleichung (1), da der Abstand des Punktes vom Mittelpunkte gleich dem Radius a der Kugel ist

$$V_a = \frac{4\pi f}{a}\int_0^a \varrho x^2\, dx\,. \tag{2}$$

Für die Kugelschale ist P ein innerer Punkt*). Um also diesen Bestandteil des Potentials, den wir V_i nennen wollen, zu berechnen, zerlegen wir die Kugelschale mit der endlichen Dicke in eine große Zahl von Kugelschalen mit der sehr kleinen Dicke Δx, wo x wieder der Radius einer dieser Kugelschalen sein möge. Dann ist das Volumen einer der Kugelschalen $4\pi x^2 \Delta x$, also, wenn die Dichte, d. h. die auf der Volumeneinheit entfallende Agensmenge ϱ ist, beträgt die auf der dünnen Kugelschale vorhandene Agensmenge

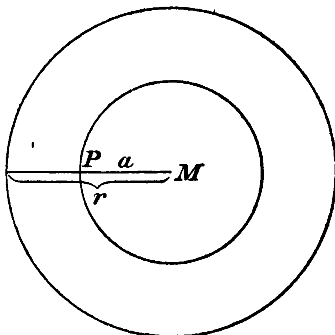


Fig. 13.

$$4\pi x^2 \Delta x \cdot \varrho\,.$$

*) Der Punkt P ist, streng genommen, kein äußerer Punkt der inneren Kugel und kein innerer Punkt der Schale, da er ja gleichzeitig auf beiden Körpern liegt. Es wäre an und für sich denkbar, daß das Potential $f \cdot \frac{m}{r}$ für den Punkt P den Wert unendlich annimmt, da ja in unmittelbarer Nähe von P, also für $r = 0$, schon eine Agensmenge liegt. Doch wir werden später (§ 18) zeigen, daß dieses Bedenken unbegründet ist, da die in unendlicher Nähe liegende Agensmenge selbst unendlich klein ist, also keinen unendlich großen Beitrag zu dem Potential liefert. Vielmehr ist der von dieser Agensmenge herrührende Beitrag zum Potential selbst unendlich klein.

Auf diese dünne Kugelschale können wir den in § 9 abgeleiteten Satz anwenden, daß das Potential für jeden Punkt im Innern derselben gleich dem Potential für einen Punkt der Oberfläche ist. Wir erhalten also für das von der dünnen Kugelschale herrührende Teilpotential den Wert

$$f\frac{4\pi x^2 \Delta x \cdot \varrho}{x} \quad \text{oder} \quad 4\pi f x \Delta x \cdot \varrho .$$

Das aus der gesamten Kugelschale mit dem inneren Radius a und dem äußeren Radius r auf einen inneren Punkt herrührende Potential V_i beträgt demnach

$$\begin{aligned} V_i &= \Sigma 4\pi f \varrho x \Delta x \\ &= 4f \Sigma \varrho x \Delta x , \end{aligned}$$

wobei sich die Summation auf die x Werte von $x = a$ bis $x = r$ zu erstrecken hat.

Nimmt man die Schichten unendlich dünn (dx) an, und nimmt man an, daß die Dichte des Agens eine stetige Funktion des Radius x ist, so folgt hieraus

$$V_i = 4\pi f \int_a^r \varrho x \, dx . \tag{3}$$

Um nun das Gesamtpotential V für den innerhalb der Vollkugel befindlichen Punkt zu finden, hat man die beiden Potentiale V_a und V_i zu addieren und erhält

$$V = V_a + V_i ,$$

oder nach Einsetzen der Werte aus Gleichung (2) und (3)

$$V = \frac{4\pi f}{a}\int_0^a \varrho x^2 \, dx + 4\pi f \int_a^r \varrho x \, dx . \tag{4}$$

Für den besonderen Fall, daß die Kugel homogen ist, daß also an allen Stellen ϱ konstant ist, läßt sich die Integration ausführen. Es wird

$$\left\{ \begin{aligned} V &= \frac{4\pi f}{a}\varrho \frac{a^3}{3} + 4\pi f \varrho \left(\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi f \varrho a^2 + 2\pi f \varrho (r^2 - a^2) \\ &= 2\pi f \varrho \left(r^2 - \frac{a^2}{3}\right) . \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Mit Hilfe dieses Potentialwertes läßt sich auch unmittelbar die Kraft berechnen, mit welcher eine innerhalb der Kugel befindliche Einheit der Agensmenge infolge der Anziehung durch die Kugel nach dem Mittelpunkte angezogen wird. Es ist diese Kraft*)

(6) $$K = -\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{4 a \pi f \varrho}{3}.$$

Die Anziehung ist also vom Radius der Kugel unabhängig, dagegen hängt sie vom Abstande des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte der Kugel ab, und zwar ist sie diesem Abstande direkt proportional, sie verhält sich also ähnlich wie die elastische Kraft, mit welcher ein elastischer Faden in seine Gleichgewichtslage zurückzukehren strebt, wenn er um die Strecke a über seine normale Länge verlängert wird.

Uns wird diese Anziehung noch interessieren bei Behandlung des homogenen Kraftfeldes.

Der Fall, daß die Agensmenge nicht konstant ist in allen Punkten, hat nur für das Gravitationspotential (in erster Linie für das der Erde) Bedeutung und soll dort noch behandelt werden.

§ 13. Niveauflächen.

Die Kenntnis des Potentials in jedem Punkte eines Kraftfeldes gestattet einen Schluß auf die Größe und Richtung der Kraft in jedem Punkte des Feldes; denn unserer Definition gemäß ist das Potential gleich der Arbeit, die geleistet werden muß, um die Einheit des Agens aus dem Unendlichen in den betreffenden Punkt zu bringen. Nehmen wir an, daß in zwei verschiedenen Punkten P und P_1 das Potential V und V_1 ist, so ist zum Transport der Einheit des Agens vom Punkte P nach P_1 die Arbeit $V - V_1$ erforderlich, welche Arbeit nach § 4 von der Art des Weges unabhängig ist. Geschieht der Transport auf dem Wege s, so muß der Quotient $\frac{V - V_1}{s}$ gleich der Kraft sein, die beim

*) Die Begründung der Formel $K = -\frac{\partial V}{\partial a}$ folgt im nächsten Paragraphen.

Transport des Teilchens zu überwinden ist. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Kraft auf dem ganzen Wege konstant ist. Ist das nicht der Fall, so können wir diesen Schluß nur für zwei sehr benachbarte Punkte machen. Zum Zeichen, daß die Punkte sehr nahe bei einander liegen, bezeichnen wir die Wegstrecke PP_1 mit Δs und können demnach schreiben $K = \frac{V - V_1}{\Delta s}$. Der Zähler dieses Ausdrucks gibt die Potentialdifferenz ΔV derselben beiden Punkte an. Es ist noch zu bedenken, daß wir die Kräfte gewöhnlich in der Richtung zu rechnen pflegen, in welcher sich ein Körper infolge dieser Kraft bewegt, in welcher also eine Zunahme der s-Werte gerechnet wird. Erfolgt diese Bewegung (nach Fig. 14) in der Richtung $P_1 \rightarrow P$, so ist der Potentialwert V_1 in dem Punkte P_1 größer als der Potentialwert V im Punkte P. Es ist daher ΔV in der Richtung von P nach P_1 gerechnet. Um nun diese verschiedenen Richtungen wieder auszugleichen, können wir dem ΔV das negative Vorzeichen geben und erhalten so die Gleichung

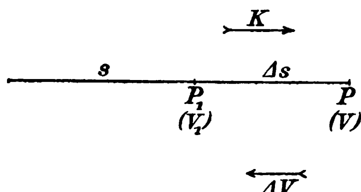


Fig. 14.

(1) $$K = -\frac{\Delta V}{\Delta s}.$$

Der aus dieser Gleichung berechnete Wert von K gibt durch sein Vorzeichen auch die Richtung der Kraft an.

Unter Anwendung der Bezeichnungen aus der Differentialrechnung folgt hieraus

(2) $$K = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Hiermit haben wir zugleich die in der Einleitung angedeutete mathematische Definition des Potentials bekommen, als diejenige Funktion, deren negativ genommener erster Differentialquotient nach dem Wege die in der Richtung dieses Weges auf die Einheit des Agens wirkende Kraftkomponente ist.

Die Gleichung (1) ist in mehrfacher Beziehung wichtig. Sie zeigt uns erstens wieder aufs neue, daß in der Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte gleichen Potentials, bei denen also $\Delta V = 0$ ist, keine Kraftwirkung besteht. Suchen wir in einem Kraftfelde alle Punkte auf, denen ein bestimmtes Potential, z. B. von dem numerischen Werte a, zukommt, so werden alle diese Punkte auf einer ganz bestimmten Fläche liegen, die im allgemeinen in sich zusammenhängend ist. Es kann allerdings auch der Fall eintreten, daß die Fläche aus mehreren getrennten Teilen besteht. Auf dieser Fläche kann man die Einheit des Agens, also auch jede andere Agensmenge ohne Arbeitsaufwand von Punkt zu Punkt beliebig bewegen, ebenso wie man auf einer horizontalen Wasserfläche einen schwimmenden Körper ohne Arbeitsaufwand (ohne Berücksichtigung der Reibung und des Wasserwiderstandes) bewegen kann. Der Vergleich einer Fläche konstanten Potentials mit einer horizontalen Wasserfläche hat derselben den Namen „Niveaufläche" eingebracht.

Es ist noch zu beachten, daß sich zwei verschiedene Niveauflächen niemals schneiden können, denn es ist undenkbar, daß demselben Punkte zugleich zwei verschiedene Potentialwerte zukommen.

§ 14. **Kraftlinien.**

Wenn in Figur 15 die beiden krummen Linien die Durchschnittslinien zweier benachbarter Niveauflächen von den Potentialen V und $V + \Delta V$ mit der Ebene des Papiers darstellen, so wollen wir untersuchen, wie groß die Kraft ist, die auf die Einheit des Agens wirkt in der Richtung von einer Niveaufläche zur anderen. Es sei P ein Punkt der Niveaufläche V. Wir bewegen die Einheit des Agens von diesem Punkte nach einem Punkte der Niveaufläche $V + \Delta V$. Erfolgt die Bewegung in der Richtung der Normalen q zu der Niveaufläche V, also auch zu der benachbarten Niveaufläche $V + \Delta V$*), so erreichen wir den Punkt P'; die Rich-

*) Zwei benachbarte Niveauflächen müssen parallel sein, denn wenn sie das nicht wären, würden sie sich schneiden. Dann würde der Durchschnittspunkt ein Punkt mit gleichzeitig zwei verschiedenen Potentialwerten sein, was aber unmöglich ist.

tung nach dem Punkte P'' bilde mit q den Winkel α, so daß also $PP'' = \frac{q}{\cos\alpha}$ ist.

Nach § 13 Gleichung (1) ist die in der Richtung PP'' wirkende Kraft $K = -\frac{\Delta V}{\Delta s}$, und da hier $\Delta s = \frac{q}{\cos\alpha}$,

$$K = -\frac{\Delta V}{q}\cos\alpha\,.$$

Es hat also die Kraft einen von der Größe des Winkels α abhängigen Wert. Der größte Wert wird erreicht, wenn $\cos\alpha = 1$, wenn also $\alpha = 0^0$ ist.

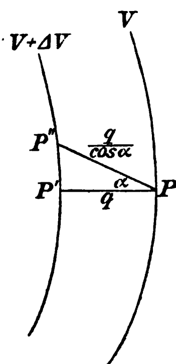


Fig. 15.

Hieraus ergibt sich, daß die zwischen zwei Niveauflächen wirkende Kraft in der Richtung der Normalen ihren Maximalwert hat. Ein frei beweglicher mit Agens behafteter Körper wird sich also stets in der Richtung der Normalen von einem Punkte einer Normalfläche nach einem Punkte der benachbarten Niveaufläche niederen Potentials (wegen des negativen Vorzeichens von K) bewegen. Wenn man in einem Kraftfelde das System der Niveauflächen konstruiert hat, so erhält man sofort durch eine Reihe von Linien, die in jedem Punkte auf den Niveauflächen senkrecht stehen, die Richtungen der in dem Kraftfelde wirkenden Kräfte. Man nennt diese Linien die „Kraftlinien" des Kraftfeldes.

Offenbar kann man in einem Kraftfelde durch jeden Punkt eine Kraftlinie ziehen, es ist also die Zahl der Kraftlinien unendlich groß. Ein Blick auf Figur 16, wo V, V_1, V_2, V_3 vier benachbarte Niveauflächen sind, und wo durch die Punkte P, P', P'', P''' der Niveaufläche V vier Kraftlinien gezogen sind, zeigt, daß trotz der unendlich großen Zahl der möglichen Kraftlinien eine durch die Form und den Abstand der Niveauflächen bedingte Anordnung der Kraftlinien besteht. Es mögen die Potentiale der vier Niveauflächen immer um denselben Betrag ΔV voneinander verschieden sein, dagegen mögen die Abstände je zweier von

ihnen q_1, q_2, q_3 betragen, wo $q_1 < q_2 < q_3$ sei. Dann ergibt sich, daß die durch die vier Punkte P, P', P'', P''' gehenden Kraftlinien sich in demselben Maße voneinander entfernen, wie die Abstände zweier benachbarten Niveauflächen zunehmen. Wenn beispielsweise

$$PP' = P'P'' = P''P'''$$

ebenso groß wie q_1 gewählt ist, so ist jedes der durch zwei benachbarte Kraftlinien und zwei benachbarte Niveauflächen begrenzte Viereck ein Quadrat. Hieraus folgt, daß die auf der Niveaufläche V_2 gemessenen Abstände der Kraftlinien die von q_1 verschiedene Größe q_3 erlangt haben. Mit Vergrößerung der Abstände zweier benachbarten Niveauflächen muß also auch der Abstand zweier benachbarten Kraftlinien in demselben Verhältnisse zunehmen. Nun wissen wir aber nach unserer Gleichung $K = -\frac{\Delta V}{\Delta s}$, daß die Kraft der Größe Δs umgekehrt proportional ist, daß also dort, wo zwei benachbarte Niveauflächen einen größeren Abstand haben, die dort wirkende Kraft geringer ist. Da aber in demselben Verhältnis auch die Abstände der Kraftlinien zunehmen, so kann man ebenfalls schließen, daß an den Stellen geringerer Kraft die Kraftlinien weiter voneinander entfernt sind, als an den Stellen größerer Kraft. Wir können also aus dem Abstande der Kraftlinien die Stärke der in dem Gebiete des Kraftfeldes wirkenden Kraft erkennen.

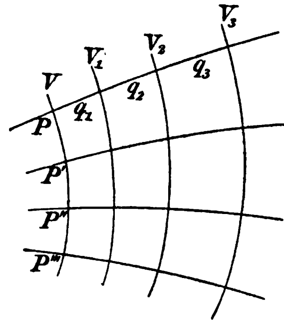


Fig. 16.

Ebenso können wir aus dem Abstande der Niveauflächen auf die Größe der an der betreffenden Stelle des Feldes herrschenden Kraft schließen, indem dort, wo die um denselben Potentialwert voneinander verschiedenen Niveauflächen einen geringeren Abstand haben, die herrschende Kraft größer ist, als dort wo der Abstand der Niveauflächen größer ist. Wir nennen den reziproken Wert des Abstandes zweier um die Einheit des Potentials verschiedener Niveauflächen das **Potentialgefälle** an der betreffenden Stelle des Kraftfeldes.

§ 15. Wahl der Einheiten.

In den vorigen Kapiteln ist über die Wahl der den Messungen zugrunde gelegten Einheiten noch keine Bestimmung getroffen. Wir können uns daher ganz den sonst in der Physik gebräuchlichen Einheiten anschließen, indem wir als Einheit der Länge das Zentimeter (cm), als Einheit der Masse das Gramm (g), als Einheit der Zeit die Sekunde (sec) wählen. Aus diesen drei sogenannten Fundamentaleinheiten folgen als abgeleitete Einheiten für die Fläche das Quadratzentimeter (cm^2), für den Raum das Kubikzentimeter (cm^3), ebenso für die Geschwindigkeit der in der Sekunde zurückgelegte Weg in Zentimetern gemessen $\left(\frac{cm}{sec}\right)$, für die Beschleunigung die nach voriger Definition bestimmte Geschwindigkeitszunahme in einer Sekunde $\left(\frac{cm}{sec^2}\right)$ und für die Kraft das Dyn, d. i. die Kraft, die der Masse von 1 g in 1 sec die Beschleunigung 1 $\frac{cm}{sec^2}$ erteilt

$$\left(1 \text{ dyn} = 1 \text{ g} \frac{cm}{sec^2}\right).$$

Bedenken wir nun, daß zwei Agensmengen mit einer Kraft aufeinander einwirken, die durch den Ausdruck

$$K = f \cdot \frac{m\, m_1}{r^2}$$

bestimmt ist, so können wir hieraus auch die Einheit des Agens bestimmen, doch ist es empfehlenswert, diese Bestimmung erst dann einzuführen, wenn über die Art des Agens nähere Angaben gemacht sind, und wenn die speziellen Wirkungen der einzelnen Agenzien bekannt sind.

§ 16. Feldstärke.

Wenn in einem Kraftfelde auf die Einheit des Agens eine Kraftwirkung ausgeübt wird, so wissen wir, daß dieselbe in einer ganz bestimmten Richtung, nämlich senkrecht zu den Niveauflächen ihren größten Wert annimmt. Dieser maximale Wert der Kraft, nach der im vorigen Paragraphen

definierten Krafteinheit (Dyn) gemessen, wird die „Feldstärke“ in diesem Punkte genannt. Wenn man also sagt, daß die Feldstärke in einem Punkte gleich H ist, so heißt das, daß in diesem Punkte auf die Einheit des Agens die Kraft von H Dyn senkrecht zu den Niveauflächen in der Richtung des abnehmenden Potentials wirkt.

Bedenken wir, daß wir die Größe der Kraft an dem Abstande der Kraftlinien voneinander erkennen können, so liegt es nahe, die Dichte der Kraftlinien direkt als Maß für die Feldstärke zu benutzen. Wir wählen die an und für sich beliebig große Zahl der Kraftlinien so, daß die durch ein Quadratzentimeter der Niveaufläche hindurchgehende Kraftlinienzahl numerisch mit der oben definierten Feldstärke übereinstimmt. Dann werden an einer Stelle, an der die Feldstärke H beträgt, durch ein Quadratzentimeter der Niveaufläche H Kraftlinien hindurchgehen. An einer Stelle, wo die Einheit der Feldstärke herrscht, geht durch ein Quadratzentimeter also gerade eine Kraftlinie hindurch.

§ 17. Kraftröhre, Kraftfluß.

Wenn in Figur 17 V_1 und V_2 beliebig begrenzte Stücke zweier benachbarter, also um den Betrag ΔV verschiedener Niveauflächen darstellen, so möge auf der Niveaufläche V_1 die beliebige aber geschlossene Kurve c_1 gezeichnet sein. Zieht man von jedem Punkte dieser Kurve senkrecht zur Fläche eine Linie, so begrenzen alle diese Linien wieder eine Kurve c_2 auf der benachbarten Niveaufläche V_2. In derselben Weise kann man fortfahren und zu einer Kurve c_3 auf der nächsten Niveaufläche usw. kommen. Die durch diese Kurven hindurchgehenden auf den Niveauflächen senkrechten Linien begrenzen einen Teil des Raumes, welcher den Namen „Kraftröhre“ führt.

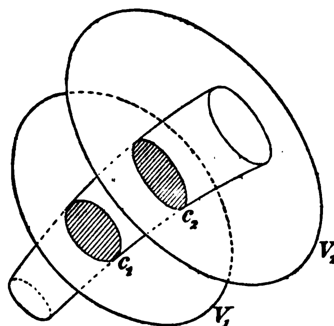


Fig. 17.

Alle Kraftlinien, welche auf der Niveaufläche durch das von der Kurve c_1 umschlossene Flächenstück hindurchgehen, müssen innerhalb der Kraftröhre verlaufen und daher auch durch das von c_2, c_3 usw. begrenzte Flächenstück gehen, da die Kraftlinien überall normal zu den Niveauflächen verlaufen. Die Zahl der durch eine solche Fläche hindurchgehenden Kraftlinien wird der „Kraftfluß" durch diese Fläche genannt. Wenn die Kurven gerade eine Kraftlinie einschließen, wenn also innerhalb der Kraftröhre eine Kraftlinie verläuft, so heißt die Kraftröhre eine „Einheitsröhre".

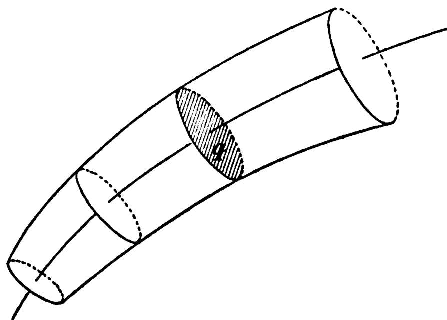


Fig. 18.

Figur 18 zeigt ein Bild einer solchen Einheitsröhre. Aus dem Querschnitt q der Einheitsröhre läßt sich die Feldstärke H berechnen. Es ist offenbar

$$H = \frac{1}{q}.$$

Ebenso ergibt sich, daß für eine beliebige Kraftröhre mit dem Querschnitt Q an einer Stelle, wo die Feldstärke H beträgt, der Kraftfluß durch das Produkt $H \cdot Q$ bestimmt ist.

§ 18. Grundbegriffe der mathematischen Potentialtheorie.

Nach § 13 Gleichung (2) ist die Kraft, mit welcher die Einheit des Agens im Kraftfelde bewegt wird, ausgedrückt durch

$$K = -\frac{\partial V}{\partial s}, \tag{1}$$

in welchem Ausdrucke V das Potential, also

$$V = f\frac{m}{r} \tag{2}$$

bedeutet.

Mittels der angegebenen Gleichung sollen noch einige Sätze aus der allgemeinen Potentialtheorie analytisch entwickelt werden.

Wenn in Figur 19 die Lage des Agenspunktes m durch seine Koordinaten a, b, c, die Lage des Punktes P, dessen

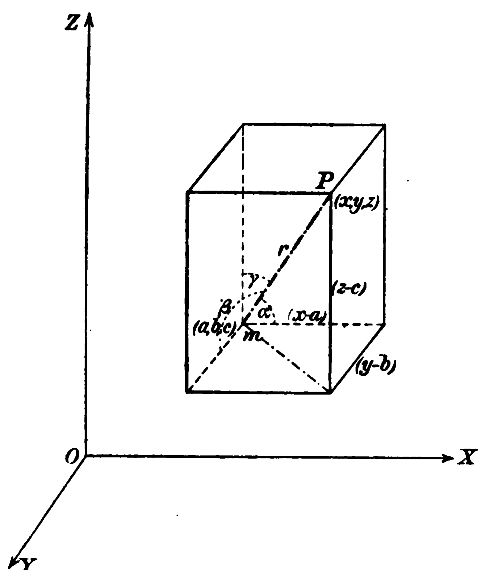


Fig. 19.

Potential bestimmt werden soll, durch seine Koordinaten x, y, z in bezug auf das Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte O und den Achsen OX, OY, OZ bestimmt sind, so gelten die aus der Figur unmittelbar ersichtlichen Gleichungen

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2, \tag{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{x-a}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y-b}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z-c}{r}, \tag{4}$$

wo r den Abstand des Punktes P von dem Agens m und α, β, γ die Winkel bedeuten, die r mit der Richtung der drei Koordinatenachsen bildet.

Durch partielle Differentiation der Gleichung (3) folgt

$$(5) \qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r},$$

also ist auch unter Benutzung der Gleichungen (4)

$$(6) \qquad \cos\alpha = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \cos\beta = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Nun sind aber die in der Richtung der Koordinatenachsen gerechneten Kraftkomponenten von K nach Gleichung (1)

$$(7) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Bilden wir jetzt aus Gleichung (2) durch partielle Differentiation die Gleichungen

$$(8) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -f\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -f\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -f\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z},$$

so folgt nach Gleichung (7)

$$(9) \qquad X = f\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}, \quad Y = f\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}, \quad Z = f\frac{m}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial z},$$

also unter Benutzung von Gleichung (6)

$$(10) \qquad X = f\frac{m}{r^2}\cos\alpha, \quad Y = f\frac{m}{r^2}\cos\beta, \quad Z = f\frac{m}{r^2}\cos\gamma.$$

Da aber $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist, folgt für die Resultierende, also für die in der Richtung r wirkende Kraft der Wert

$$K = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$
$$= f\frac{m}{r^2}\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma},$$

also

$$(11) \qquad K = f\frac{m}{r^2}.$$

Wir ersehen hieraus, daß unter der Voraussetzung, daß der in einer Richtung gebildete partielle Differentialquotient des Potentials die in dieser Richtung wirkende Kraft ist, die Kraft wieder auf unsere ursprüngliche Form $f\frac{m}{r^2}$ gebracht wird.

Wir hätten auch umgekehrt unter der Voraussetzung der Gleichung (11) und der einfachen geometrischen Beziehungen, die sich aus der Figur ergeben, die übrigen, oben abgeleiteten Gleichungen entwickeln können, also nachweisen können, daß unter der Voraussetzung der nach dem umgekehrt quadratischen Verhältnis der Entfernung wirkenden Kraft, die in irgend einer beliebigen Richtung wirkende Kraftkomponente durch den negativen Differentialquotienten einer gewissen Funktion nach dieser Richtung gebildet werden kann. Die so bestimmte Funktion würde dann den Namen „Potential“ erhalten haben. Daß diese Ableitung des Potentials auf dieselbe Funktion führt, die wir aus dem Arbeitsbegriff entwickelt haben, erscheint hiernach selbstverständlich.

Treten statt des Agenspunktes m mehrere Agenspunkte $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ mit den Koordinaten $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3, \ldots a_n b_n c_n$ auf, so ergibt sich sofort, daß auch für die Kraftwirkung auf den Punkt P mit den Koordinaten x, y, z die Beziehungen gelten

$$(12) \qquad V = f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \frac{m_n}{r_n}\right) = f\sum\frac{m}{r},$$

$$(13) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Solange der Punkt P von den Punkten $m_1, m_2 \ldots$ eine getrennte Lage hat, solange also r_1, r_2 usw. einen von Null verschiedenen Wert haben, werden alle Glieder der obigen Summe für V, wofern nicht einer der Werte m selbst unendlich wird, endlich bleiben. Fällt aber P mit einem der Punkte m zusammen, so wird das diesem Punkte entsprechende Glied $\frac{m_i}{r_i}$ wegen des unendlich kleinen r_i unendlich groß, wenn nicht m_i selbst unendlich klein wird.

Wenn wir es mit wirklichen Körpern zu tun haben, so tritt der Fall, daß in einem Punkte die entsprechende Agens-

menge unendlich groß wird, niemals ein. Begrenzen wir vielmehr ein Volumenelement durch die unendlich kleine Strecke $da\,db\,dc$, bilden wir also ein Parallelepiped mit diesen Kanten, so beträgt sein Volumen $da\,db\,dc$.

Bezeichnen wir noch die Dichte des Agens in einem Punkte, also die Menge des in der Volumeneinheit enthaltenen Agens mit ϱ, so wird die in dem Volumenelement $da\,db\,dc$ enthaltene Agensmenge ausgedrückt durch

$$dm = \varrho \cdot da\,db\,dc\,. \tag{14}$$

Hierin kann ϱ entweder für einen Körper konstant sein oder es kann eine Funktion der Koordinaten, also von Punkt zu Punkt verschieden sein. Ist ϱ in allen Punkten konstant, so heißt der Körper „homogen".

Für den Fall, daß in einem stetigen Körper die Verteilung des Agens ebenfalls stetig ist, geht die Summengleichung (12) über in das Integral

$$V = f\int\frac{dm}{r}\,,$$

also unter Verwendung von Gleichung (14) in

$$V = f\iiint\frac{\varrho\,da\,db\,dc}{r}\,. \tag{16}$$

Der Nachweis, daß für den Fall, für welchen $r = 0$ wird, für welchen also der Punkt P mit einem Punkte des Agens selbst zusammenfällt, der obige Ausdruck nicht unendlich wird, wird dadurch geführt, daß man Polarkoordinaten (r, ψ, ϑ) einführt, bei denen der Punkt P Anfangspunkt des Koordinatensystems ist. Für diesen Fall nimmt das Raumelement $da\,db\,dc$ die Form an $r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\psi\,d\vartheta$. Setzen wir diesen Wert in Gleichung (16) ein, so wird

$$V = f\iiint\varrho\cdot\frac{r^2\sin\vartheta\,dr\,d\psi\,d\vartheta}{r} = f\iiint\varrho r\sin\vartheta\,dr\,d\psi\,d\vartheta$$

$$= f\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_{\psi_0}^{\psi_1}d\psi\int_0^r\varrho r\,dr\,.$$

Hierin wird der Integrand des letzten Integrals für $\lim r = 0$ selbst gleich Null.

Wir können uns diese Tatsache auch dadurch klar machen, daß wir bedenken, daß für einen Punkt, der mit

einem Agenspunkte selbst zusammenfällt, zwar r unendlich klein wird, aber nur unendlich klein von erster Ordnung, daß aber für denselben Punkt das Volumenelement $da\,db\,dc$ unendlich klein von der dritten Ordnung ist, so daß also der Potentialwert für diesen Punkt sogar noch unendlich klein von zweiter Ordnung bleibt. In derselben Weise ergibt sich dann auch leicht, daß die Kraftkomponenten also $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$ usw. noch unendlich klein von der ersten Ordnung bleiben, daß also das Agenselement, mit dem der beeinflußte Punkt P zusammenfällt, keinen unendlich großen Betrag zu dem ganzen Integral liefert.

Wenn wir die zweiten Differentialquotienten des Potentials bilden, so ergibt sich eine besonders einfache und wichtige Beziehung, die noch abgeleitet werden mag.

Wir nehmen vorerst an, der beeinflußte Punkt habe von jedem mit Agens belegten Punkte des Körpers einen endlichen Abstand, so daß also auf keinen Fall $r = 0$ wird.

Wir bilden nach Gleichung (8)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -f\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -f\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -f\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z},$$

und setzen die Werte aus Gleichung (5) ein

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r},$$

so entsteht

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -fm\frac{x-a}{r^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -fm\frac{y-b}{r^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -fm\frac{z-c}{r^3}.$$

Differentiieren wir noch einmal, so wird

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -fm\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a}{r^3}\right)$$

$$= -fm\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{(x-a)^2}{r^5}\right),$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -fm\left(\frac{1}{r^3} - 3\,\frac{(y-b)^2}{r^5}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -fm\left(\frac{1}{r^3} - 3\,\frac{(z-c)^2}{r^5}\right).$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen folgt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} =$$

$$= -fm\left[\frac{3}{r^2} - 3\,\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{r^5}\right]$$

$$= -fm\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right) = 0\,.$$

Es ergibt sich also, daß die Summe der zweiten Ableitungen des Potentials nach den drei Koordinatenachsen für einen außerhalb des Agens belegenen Punkt den Wert Null hat. Für die Summe der zweiten Differentialquotienten hat man den Ausdruck ΔV eingeführt. Unter Benutzung dieser Bezeichnung wird also

(17) $$\Delta V = 0\,.$$

Diese Differentialgleichung führt den Namen der Laplaceschen Gleichung.

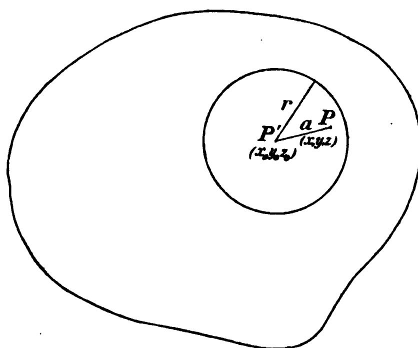


Fig. 20.

Die Laplacesche Gleichung bildet nur einen speziellen Fall einer allgemeineren Gleichung, welche wir erhalten, wenn wir die Voraussetzung fallen lassen, daß der untersuchte Punkt von jedem Agenspunkte eine endliche Entfernung hat.

Es sei Punkt P (Fig. 20) der innerhalb des Agens liegende Punkt. Wir nehmen nun in der Nähe von P einen zweiten Punkt P' an und konstruieren um P' eine Kugel, welche den Punkt P um-

schließt. Wählen wir den Radius der Kugel genügend klein, so können wir annehmen, daß innerhalb derselben die Dichte des Agens den überall konstanten Wert ϱ hat.

Um nun das Potential V des Punktes P zu bestimmen, können wir es in die beiden Bestandteile zerlegen, welche herrühren von dem Agens innerhalb der kleinen Kugel und von dem Agens außerhalb der kleinen Kugel. Nennen wir den ersten Bestandteil V_1, den zweiten V_2, so wird

$$V = V_1 + V_2 .$$

Es folgt hieraus durch zweimalige Differentiation nach den Koordinaten und durch Addition der Differentialquotienten die Gleichung

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 . \tag{18}$$

Der letzte Summand dieses Ausdruckes ist aber nach den vorigen Ableitungen, da ja der Punkt außerhalb desjenigen Agens liegt, das den Wert V_2 verursacht, gleich Null, so daß sich die Gleichung reduziert auf

$$\Delta V = \Delta V_1 . \tag{19}$$

Wir bedenken nun noch, daß das Potential eines im Innern einer Kugel mit konstanter Dichte ϱ liegenden Punktes nach § 10 Gleichung (4) ausgedrückt ist durch

$$V_1 = 2\pi f \varrho \left(r^2 - \frac{a^2}{3}\right).$$

In diesem Ausdrucke bedeutete r den Radius der Kugel und a den Abstand des untersuchten Punktes vom Mittelpunkt der Kugel. Nennen wir noch die Koordinaten des Mittelpunktes P' unserer kleinen Kugel x' y' z', so wird

$$a^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 ,$$

also nimmt der Ausdruck für V_1 den Wert an

$$V_1 = 2\pi f \varrho \left(r^2 - \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{3}\right).$$

Bilden wir $\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = 2\pi f \varrho \cdot (-\tfrac{2}{3}) = -\tfrac{4}{3}\pi f \varrho ,$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = -\tfrac{4}{3}\pi f \varrho ,$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = -\tfrac{4}{3}\pi f \varrho ,$$

also durch Addition

$$\Delta V_1 = -4\pi f \varrho .$$

Da nach Gleichung (19) $\Delta V = \Delta V_1$ ist, so folgt endlich

(20) $$\Delta V = -4\pi f \varrho .$$

Diese Gleichung nennt man die Poissonsche Gleichung. Sie gilt für einen innerhalb des Agens liegenden Punkt. Da man aber einen außerhalb des Agens liegenden Punkt betrachten kann als einen innerhalb des Agens liegenden Punkt, an dessen Stelle die Dichte den Wert $\varrho = 0$ annimmt, so schließt sie die Laplacesche Gleichung (7) mit ein und führt daher auch wohl den Namen der Laplace-Poissonschen Gleichung.

Die Wichtigkeit der Gleichung besteht erstens darin, daß man bei gegebener Potentialfunktion aus der Gleichung die Dichte ϱ in jedem Punkte bestimmen kann, und zweitens darin, daß sie diejenige Differentialgleichung ist, deren Lösung bei gegebenen Grenzbedingungen alle Fragen über das Potential eines Körpers mit gegebener Begrenzung zu beantworten gestattet. Letztere Aufgabe ist rein mathematischer Natur und bildet wie schon angegeben, den Kernpunkt der mathematischen Potentialtheorie, die in einem besonderen Bande der Sammlung Schubert von Wangerin-Halle eingehend behandelt werden soll.

II. Teil.

Die Gravitation.

§ 19. Das Gravitationsgesetz.

Newton stellte 1686 das nach ihm benannte Gravitationsgesetz auf: „Zwei Massen ziehen einander an mit einer Kraft, welche dem Produkte der Massen direkt, dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist.“ Es ist also die Gravitation eine Fernkraft von der in § 5 bezeichneten Art.

Newton wurde zu seinem Gesetze geführt, indem er die Beschleunigung berechnete, die der um die Erde in kreisförmiger Bahn bewegte Mond nach dem Mittelpunkte der Erde hin erfahren muß, um trotz seiner tangentialen Geschwindigkeit in seiner kreisförmigen Bahn zu bleiben.

Die Gesetze der Zentralbewegung lehren, daß die Zentralbeschleunigung γ durch den Ausdruck

$$\gamma = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

bestimmt sind, wenn R den Radius der Kreisbahn und T die Umlaufszeit des Körpers bedeuten.

Für den Mond betragen diese beiden Größen $R = 384\,400$ km $= 3{,}844 \cdot 10^{10}$ cm und $T = 2\,360\,580$ sec. Hieraus ergibt sich für γ der Wert $\gamma = 0{,}272$ cm/sec². Die Beschleunigung, die ein auf der Erdoberfläche fallender Körper erfährt, ist gleich $g = 981$ cm/sec², folglich verhalten sich die beiden Beschleunigungen $g : \gamma = 981 : 0{,}272 = 3602 : 1$. Da der mittlere Erdradius $r = 6370$ km beträgt, verhält sich die

Entfernung des Mondes zu der eines auf der Erdoberfläche freifallenden Körpers vom Mittelpunkte der Erde wie

$$R : r = 384400 : 6370 = 60{,}3 : 1\,,$$

also ist das Verhältnis ihrer Quadrate

$$R^2 : r^2 = 3641 : 1\,.$$

Dieses Verhältnis ist mit großer Annäherung dem umgekehrten Verhältnis der Zentralbeschleunigung des Mondes zu der Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche gleich.

Nachdem Newton dieses Verhältnis bestimmt hatte, versuchte er auch, die Planetenbewegungen, für welche Kepler die nach ihm benannten Gesetze aufgestellt hatte, durch eine zwischen den Massen herrschende Anziehung zu erklären. Das zweite Keplersche Gesetz, wonach die Flächengeschwindigkeit eines Planeten konstant ist, läßt sich vollständig aus der Annahme einer von der Sonne ausgehenden Zentralkraft erklären, die nach irgend welchen Gesetzen wirkt. Das erste Keplersche Gesetz, nach welchem die Bewegung eines Planeten um die Sonne in Form eines Kegelschnittes erfolgt, bedingt aber die Annahme einer im umgekehrt quadratischen Verhältnis der Entfernungen dieses Planeten von der Sonne wirkenden Anziehung durch die Sonne.

Die Gültigkeit des dritten Keplerschen Gesetzes, nach welchem sich die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne verhalten, beweist, daß auch für die Planeten in verschiedenen Entfernungen von der Sonne dieselbe aus dem Newtonschen Gravitationsgesetze zu berechnende Anziehung zu folgern ist.

§ 20. Die Masseneinheit.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz berechnet die zwischen zwei Massen m und m_1 wirkende Kraft nach der Formel

$$K = f \cdot \frac{m\, m_1}{r^2}\,.$$

Newton konnte die Richtigkeit dieser Formel nur für die großen Massen der Weltenkörper nachweisen, deren absolute Masse aber unbekannt war. Zwar vermutete Newton, daß

auch zwischen den kleineren Massen, die uns auf Erden zur direkten Beobachtung und Messung zur Verfügung stehen, eine solche Anziehung besteht, doch hielt er sie für zu gering, um sie experimentell nachweisen zu können. Aus diesem Grunde war es ihm auch nicht möglich, den Faktor f in obiger Formel zu bestimmen.

Wir wären nun zwar imstande, die Einheit der Massen m und m_1 so zu wählen, daß unter Benutzung der früheren Wahl der Einheiten für die Kraft K und für die Entfernung r der Faktor f den Wert „eins“ erhält. Aber wir müssen bedenken, daß in der Definition der Krafteinheit

$$\left(1\,\mathrm{dyn} = \frac{1\,\mathrm{g} \cdot 1\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{sec}^2}\right)$$

schon der Begriff der Masse enthalten ist. Wir würden also entweder die Krafteinheit der neuen Definition der Masseneinheit wieder anpassen müssen, oder wir müßten für die Masseneinheit zwei verschiedene Definitionen haben, indem wir neben der früher definierten (etwa der trägen) Masseneinheit von 1 g noch eine neue, etwa die gravitierende Masseneinheit einführen müßten, die so gewählt wird, daß der Faktor f den Wert „eins“ bekommt. Einfacher aber kommt man zum Ziel, wenn man die frühere Definition der Masseneinheit beibehält und nun den Faktor f aus derselben herzuleiten sucht. Das ist nur auf experimentellem Wege möglich, indem man unmittelbar die Kraft mißt, mit der zwei bekannte Massen m und m_1 in der Entfernung r aufeinander einwirken. Setzt man dann die aus den Versuchen sich ergebenden Werte für m, m_1, r und K in die Gleichung

$$K = f \cdot \frac{m\, m_1}{r^2}$$

ein, so bleibt als einzige Unbekannte der Faktor f übrig. Man nennt diesen Faktor, der für alle Massen denselben Wert haben muß, wenn das Newtonsche Gravitationsgesetz für alle Massen gelten soll, die „Gravitationskonstante“.

§ 21. Bestimmung der Gravitationskonstanten.

Nachdem es Maskelyne im Jahre 1774 gelungen war, nachzuweisen, daß auf den beiden Seiten (Nord- und Süd-

seite) des in der Grafschaft Perth in Schottland gelegenen, sich fast senkrecht erhebenden, von Osten nach Westen gerichteten Berggrades Shehallien eine Abweichung der lotrechten Richtung nach dem Berge zu bestand, daß also auch irdische Massen eine Anziehung aufeinander ausübten, bestimmte Cavendish im Jahre 1798 zuerst die gegenseitige Anziehung zweier Bleikugeln nach einer Methode, die von Michell angegeben war. Cavendish konstruierte nach dem Vorgange von Michell eine Torsionswage, an derem Querbalken zwei Bleikugeln aufgehängt waren und näherte diesen Bleikugeln abwechselnd von der einen und der anderen Seite zwei große Bleikugeln, welche die ersteren um einen meßbaren Betrag aus ihrer durch die Aufhängung bedingten Gleichgewichtslage ablenkten. Das durch die Ablenkung der beiden beweglichen Kugeln erzeugte Kräftepaar wurde durch das Drehungsmoment des Aufhängedrahtes aufgehoben, und da man dieses durch Vorversuche bestimmen konnte, war auch die Messung der ablenkenden Kraft im Prinzip ausführbar.

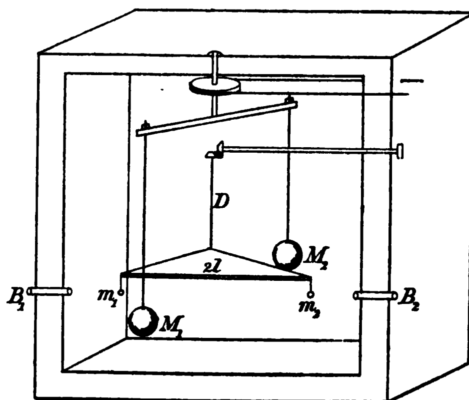


Fig. 21.

Figur 21 gibt eine schematische Zeichnung der von Cavendish benutzten Versuchsanordnung: In einem gegen Temperaturschwankungen und demnach auch gegen Luftströmungen möglichst geschützten Raume war an einem an der Decke befestigten Gerüste ein Querarm $2\,l$ von 6 Fuß = 182,88 cm Länge drehbar befestigt, an dessen Enden an

zwei langen Stangen die beiden Bleikugeln M_1 und M_2 von annähernd 6 Zoll = 15,238 cm Radius*) hingen. Das spezifische Gewicht des Bleis war zu 11,5 bestimmt. Die Masse jeder der beiden Kugeln betrug $M = 158$ kg. Die Querstange konnte um die in der Decke befestigte Achse mittels zweier nach außen geführten Schnüren gedreht werden. Konaxial mit dieser Drehungsachse war der Torsionskopf der eigentlichen Drehwage in einem in der Figur nicht gezeichneten Gerüst befestigt. Dieser Torsionskopf war ebenfalls mittels einer Stange von außen drehbar. An dem Torsionskopf hing ein dünner versilberter Kupferdraht, an dessen unteren Enden mittels zweier gespreizten Drähte ein äußerst leichter 6 Fuß langer Querbalken aus Tannenholz aufgehängt war. An den Enden des Querbalkens waren zwei kleinere Bleikugeln m_1 und m_2 von annähernd 1 Zoll = 2,540 cm Radius aufgehängt. Die Masse jeder derselben war zu $m = 730$ Gramm bestimmt. Um das durch die Elastizität verursachte Drehungsmoment des Aufhängedrahtes zu bestimmen, wurde der Querbalken mit den angehängten Massen in Schwingungen versetzt. Die zu einer vollständigen Schwingung erforderliche Zeit wurde bei einem von 29 von Cavendish ausgeführten Versuchen zu $\tau = 1680$ Sekunden bestimmt. Da nun die Schwingungszeit eines in Torsionsschwingungen versetzten Körpers mit dem Drehungsmoment Δ und dem Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ durch die Gleichung

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{\Delta}}$$

verbunden sind, so ergibt sich hieraus für Δ der Wert

$$\Delta = \frac{4\pi^2 \mathfrak{T}}{\tau^2}.$$

Für das Trägheitsmoment kommt hier wegen der verschwindend kleinen Masse des Aufhängequerbalkens nur das Trägheitsmoment der beiden kleinen Bleikugeln $\mathfrak{T} = 2ml^2$ in Frage, so daß also das Drehungsmoment des Drahtes zu

$$\Delta = \frac{4\pi^2 \cdot 2ml^2}{\tau^2}$$

*) Aus der Masse und dem angegebenen spezifischen Gewicht berechnet sich der Radius jeder Kugel zu $R = 14,859$ cm.

bestimmt werden kann. Setzen wir hier die aus dem Cavendishschen Versuche bestimmten Werte $m = 730$ g, $l = 91{,}44$ cm, $\tau = 1680$ sec ein, so erhalten wir

$$\Delta = \frac{8\pi^2 \cdot 730 \cdot 91{,}44^2}{1680^2} = 170{,}75 \text{ erg.}$$

Cavendish drehte nun die beiden großen Massen mittels der an der Zimmerdecke angebrachten drehbaren Achse so, daß sie den kleinen Bleikugeln bis auf die Entfernung von $a = 8$ Zoll $= 20{,}32$ cm genähert wurden. Dann fand eine Ablenkung der kleinen Kugeln aus ihrer Gleichgewichtslage um die Strecke $\delta = 0{,}766$ Zoll $= 1{,}946$ cm statt. Diese Ablenkung beobachtete er mittels zweier in die Wand des Beobachtungsraumes eingesetzten Beobachtungsfernrohre B_1 und B_2 an der Verschiebung kleiner an dem Arm der Aufhängung angebrachten Maßstäbchen. Da die Kugeln niemals vollkommen in Ruhe kamen, so las er ähnlich wie man bei einer empfindlichen chemischen Wage verfährt, drei Umkehrpunkte des schwingenden Stabes ab und bestimmte hieraus in bekannter Weise die neue Ruhelage.

Das durch die Anziehung der großen Bleikugeln auf die kleinen verursachte Drehungsmoment, ist, wenn man die anziehende Kraft auf jeder Seite K nennt, gleich $2Kl$.

Das vorhin berechnete Drehungsmoment bezieht sich auf eine Drehung um den Winkel von der Bogenlänge „eins". Bei dem vorliegenden Versuch findet aber nur eine Drehung um den Winkel $\frac{\delta}{l}$ statt, da das äußerste Ende des Arms von der Länge l um die Strecke δ abgelenkt ist, also beträgt der hier in Frage kommende Teilbetrag des Drehungsmomentes $\Delta \cdot \frac{\delta}{l}$. Die beiden Drehungsmomente sind gleich zu setzen, folglich ist $2Kl = \Delta \cdot \frac{\delta}{l}$, woraus

$$K = \frac{\Delta \cdot \delta}{2l^2}$$

folgt.

Hierin setzen wir die schon bekannten Werte

$$\Delta = 170{,}75 \text{ erg}, \quad \delta = 1{,}946 \text{ cm}, \quad l = 91{,}44 \text{ cm}$$

ein und erhalten

$$K = \frac{170{,}75 \cdot 1{,}946}{2 \cdot 91{,}44^2} = 0{,}01987 \text{ dyn.}$$

Dieses ist die Kraft, mit welcher die Masse $M = 158\,000$ g die Masse $m = 730$ g in einer Entfernung von $a = 20{,}32$ cm anzieht.

Wenden wir nun die aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz folgende Formel

$$K = f\frac{Mm}{a^2}$$

an, so folgt hieraus für die Konstante f der Wert

$$f = \frac{Ka^2}{Mm}.$$

Die obigen Werte eingesetzt ergibt

$$f = \frac{0{,}01987 \cdot 20{,}32^2}{158000 \cdot 730} = 7{,}11 \cdot 10^{-8}.$$

Cavendish hat eine Reihe von 29 Versuchen ausgeführt und als Mittelwert aller dieser Versuche den Wert

$$f = 6{,}717 \cdot 10^{-8}$$

erhalten.

Nach einem Verfahren, welches dem von Cavendish ausgeführten im wesentlichen gleich ist, haben später Reich, dann Baily, ferner Cornu und Baille und endlich Boys die Gravitationskonstante bestimmt. Diese letzteren Bestimmungen sind insofern besonders interessant, als die Dimensionen der von Boys benutzten Apparate im Vergleich zu den Cavendishschen Apparaten geradezu winzig genannt werden können. Der Grund für die so geringen von Boys gewählten Dimensionen liegt in der Benutzung der von ihm zuerst hergestellten Quarzfäden, welche bei relativ großer Tragfähigkeit so dünn hergestellt werden, daß die an einem Quarzfaden aufgehängten Massen infolge der außerordentlich geringen Torsion des Aufhängefadens schon durch minimale Kräfte aus der Gleichgewichtslage gebracht werden können.

In den letzten Jahren werden von der Firma Max Kohl in Chemnitz kleine Apparate in den Handel gebracht, welche ganz nach dem Cavendishschen Prinzipe unter Be-

nutzung eines Boysschen Quarzfadens als Aufhängefaden für das drehbare System gebaut sind. Die Apparate können an einer erschütterungsfreien Wand jedes Gebäudes fertig aufgestellt werden.

Figur 22 zeigt die Kohlsche Gravitationswage. Auf einem Dreifuß mit Stellschrauben ist die eigentliche Drehwage angebracht, ein rechteckiges Gehäuse mit doppelten Glaswänden, auf dem ein unten weites, oben enges Metallrohr aufgesetzt ist. Das lange enge Metallrohr enthält am oberen Ende den Torsionskopf, das untere weitere Metallrohr ist mit zwei zueinander senkrecht stehenden Beobachtungsfenstern versehen, hinter welchen ein an dem im Gehäuse hängenden drehbarem System befestigter kleiner Spiegel so angebracht ist, daß ein in das eine Fenster fallender Lichtstrahl infolge der Reflexion am Spiegel durch das zweite Fenster herausfällt. Das drehbare System besteht aus einem langen Quarzfaden, an dessen unterem Ende ein leichtes Aluminiumstäbchen befestigt ist, welches den kleinen Spiegel und am unteren Ende einen dünnen harten Kupferdraht trägt, an dessen beiden Enden zwei kleine Silberkugeln von $r = 0{,}275$ cm Radius und $m = 0{,}75$ g Masse in einem Mittelpunktsabstande von $2\,l = 3{,}6$ cm sitzen.

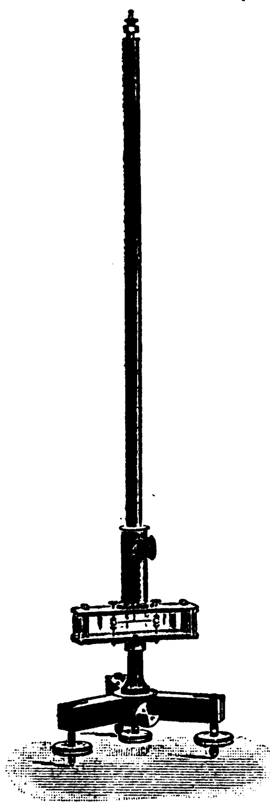


Fig. 22.

Durch eine besondere Vorrichtung kann das drehbare hängende System arretiert werden, so daß also der dünne Quarzfaden gegen Zerreißen geschützt und der Apparat transportfähig gemacht ist.

Figur 23 zeigt die Gravitationswage in ihrer Aufstellung auf einem Wandkonsol mit den ablenkenden Massen und der zur Erzeugung eines Lichtzeigers dienenden Glühlampe. Die

ablenkenden Massen sind zwei Bleikugeln von 4 cm Radius und $M = 2800$ g Masse. Sie sind in einem Rahmen auf zwei Führungsstangen verschiebbar so angeordnet, daß durch das Ziehen an zwei herunterhängenden Schnüren die Massen entweder den beiden ablenkenden Massen bis auf

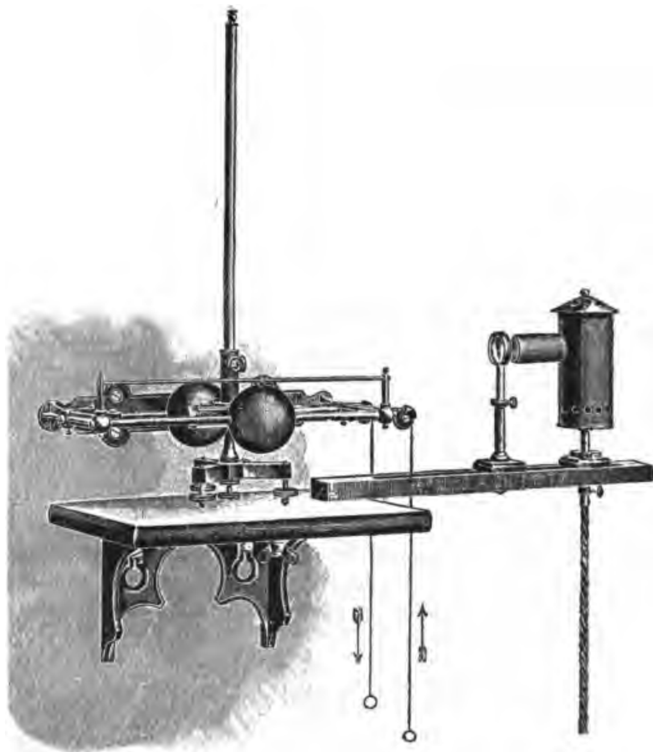


Fig. 23.

eine Entfernung von $a = 5{,}3$ cm gegenüberstehen, also ein Drehungsmoment in gleichem Sinne auf das drehbare System ausüben, oder in ihrer Mittelstellung symmetrisch zum ablenkenden System keine Drehung bewirken. Der Rahmen mit den ablenkenden Massen wird unabhängig von der eigentlichen Drehwage direkt an der erschütterungsfreien Wand befestigt.

Es ist hier zu beachten, daß infolge der geringen Dimensionen die anziehenden Wirkungen der großen Bleikugeln nicht nur auf die nahe Silberkugel, sondern auch auf die entferntere Silberkugel in Rechnung zu bringen sind. Die Wirkung einer Bleikugel auf die nahe Silberkugel ist

$$K_1 = f \cdot \frac{Mm}{a^2},$$

also ihr Drehungsmoment

$$K_1 \cdot l = f \cdot l \cdot \frac{Mm}{a^2},$$

auf die entferntere Silberkugel

$$K_2 = f \cdot \frac{Mm}{a^2 + 4l^2},$$

ihre senkrecht zur Drehungsachse wirkende Komponente

$$K_3 = f \cdot \frac{Mm}{a^2 + 4l^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4l^2}} = f \cdot \frac{Mm \cdot a}{(\sqrt{a^2 + 4l^2})^3},$$

also ihr Drehungsmoment

$$K_3 \cdot l = f \cdot \frac{Mm \cdot a \cdot l}{(\sqrt{a^2 + 4l^2})^3}.$$

Die beiden Drehungsmomente wirken einander entgegen, es ist daher das zweite negativ zu rechnen. Da auf beiden Seiten des Armes dasselbe Moment wirkt, beträgt das gesamte Drehungsmoment

$$D = 2l(K_1 - K_3) = f \cdot 2Mml\left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{(\sqrt{a^2 + 4l^2})^3}\right).$$

Setzen wir hier die angegebenen Werte $M = 2800$ g, $m = 0{,}75$ g, $a = 5{,}3$ cm, $l = 1{,}8$ cm ein, so erhalten wir

$$D = f \cdot 111{,}630 \text{ erg.}$$

Das Torsionsmoment Δ des Quarzfadens berechnet sich aus der Schwingungsdauer des drehbaren Systems, welche zu $\tau = 1080$ sec bestimmt ist; das Trägheitsmoment des Wagebalkens mit den Silberkugeln ist

$$\mathfrak{T} = 2\left(l^2 m + \tfrac{2}{5} r^2 m\right) = 4{,}9054 \text{ erg}.$$

Hieraus ergibt sich unter Benutzung der Formel

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{\varDelta}}$$

der Wert

$$\varDelta = \frac{4\pi^2 \mathfrak{T}}{\tau^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 4{,}9054}{1080^2} = 0{,}000166 \text{ erg.}$$

Die Größe der Ablenkung wird durch die Bewegung des Lichtzeigers auf einer im Abstande von $p = 225$ cm befindlichen Zentimeterskala zu $\delta = 21$ cm gemessen. Es ist wegen der durch die Reflexion verursachten Verdoppelung der Ablenkung nur die Hälfte dieses Betrages in Rechnung zu setzen, also beträgt die Größe des Ablenkungswinkels in Bogenmaß $\frac{\delta}{2p} = \frac{21}{450}$. Um diese Ablenkung zu bewirken, ist ein Drehungsmoment von der Größe $D' = \varDelta \cdot \frac{\delta}{2p}$ erforderlich. Die beobachteten Werte eingesetzt, ergeben hierfür den Wert

$$D' = \frac{0{,}000166 \cdot 21}{450} = 0{,}000007747 \text{ erg.}$$

Dieses Drehungsmoment wird durch das oben berechnete Drehungsmoment $D = f \cdot 111{,}630$ erg hervorgerufen. Daher setzen wir $D = D'$ und erhalten

$$f \cdot 111{,}630 = 0{,}000007747\,,$$

woraus dann für die Gravitationskonstante der Wert

$$f = 6{,}66 \cdot 10^{-8}$$

folgt. Das ist ein Wert, welcher mit dem Mittelwert der früheren Beobachtungen sehr gut übereinstimmt.

Es mag nur noch kurz angedeutet werden, daß die gewöhnliche Wage ebenfalls zur Bestimmung der Gravitationskonstanten benutzt ist. Dieses geschah zuerst von Jolly, dann vor kurzem von Richarz und Krigar-Menzel und von Poynting. Die Beobachtungen von Richarz und Krigar-Menzel geschahen in einer unterirdischen Kasematte in Spandau, um gegen Temperatureinflüsse völlig geschützt zu sein. Es wurden an den Enden einer empfindlichen Wage zwei gleiche Massen von 1 kg mittels Fäden

aufgehängt und zwar so, daß sich die eine Masse oberhalb, die andere unterhalb einer aus einzelnen Bleiklötzen zusammengesetzten Bleimasse von etwa 2 cbm Größe befand. Diese Bleimasse verminderte das Gewicht des unter derselben hängenden Kilogrammstückes und vermehrte das Gewicht des über derselben hängenden Kilogrammstückes infolge der Massenanziehung. Diese anziehende Kraft war also direkt der Messung zugänglich. Bei diesen Versuchen ergab sich als Gravitationskonstante der Wert

$$f = (6{,}685 \pm 0{,}011)\,10^{-8}\,.$$

§ 22. Mittlere Erddichte.

Kennt man die Gravitationskonstante, so kann man auch die Masse der Erde bestimmen, denn da wir annehmen können, daß die Erde aus konzentrischen Schichten zusammengesetzt ist, von denen jede für sich in gleicher Weise aus Masse derselben Dichte besteht, so wirkt jede Kugelschale, also auch die gesamte Erdmasse auf eine außerhalb der Erde, z. B. auf eine auf der Erdoberfläche befindliche Masse gerade so, als ob die ganze Masse im Erdmittelpunkte vereinigt wäre. Die durch die Gravitation der Erde bewirkte Anziehung ist das Gewicht G des Körpers, oder da wir dasselbe durch das Produkt mg ausdrücken können, wo m die Masse des Körpers und $g = 981$ cm die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche ist, ist sie durch dieses Produkt mg bestimmt. Nennen wir die Masse der Erde M, so folgt nach dem Gravitationsgesetze für die anziehende Kraft der Wert $f\frac{Mm}{R^2}$. Hierin bedeutet R den Abstand der angezogenen Masse vom Mittelpunkte der Erde, also für einen Körper auf der Erdoberfläche den Erdradius. Setzen wir die beiden Werte der anziehenden Kraft gleich, so ergibt sich die Gleichung

$$f\frac{Mm}{R^2} = mg\,.$$

Es möge die mittlere Dichte der Erde ϱ_m genannt werden, dann ist $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \varrho_m$, also folgt

$$f \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \varrho_m \cdot m}{R^2} = mg\,,$$

und hieraus

$$\varrho_m = \frac{3g}{f \cdot 4\pi R}.$$

Zur zahlenmäßigen Berechnung setzen wir

$$R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^8 \text{ cm},$$

$$g = 981 \text{ cm},$$

$$f = 6,685 \cdot 10^{-8}$$ (d. i. der Richarz-Krigar-Menzelsche Wert).

Dann ist

$$\varrho_m = \frac{3 \cdot 981}{6,685 \cdot 10^{-8} \cdot 4\pi \cdot 6,37 \cdot 10^8} = 5,50.$$

§ 23. Das Erdpotential innerhalb der Erde.

Unter der Annahme, daß die Erde an allen Stellen dieselbe Dichte hätte, können wir das Potential für jeden Punkt des Erdinnern, also auch die im Erdinnern wirkende Anziehungskraft so berechnen, wie in § 12 ausgeführt. Nun ist aber diese Annahme sicher nicht richtig, denn wie aus dem vorhergehenden Paragraphen hervorgeht, ist die mittlere Dichte der Erde $\varrho_m = 5,5$. Oberflächenproben ergeben für die mittlere Dichte der die obersten Schichten der Erde bildenden Stoffe den Wert $\varrho_0 = 2,5$, es nimmt also die Dichte der Erde sicher stark nach innen zu. Nun sind wir aber nur an einzelnen Stellen der Erde bis annähernd 1 km in die Erde eingedrungen. Von der Verteilung der Masse in den tieferen Schichten wissen wir gar nichts. Wir sind folglich ganz auf willkürliche Annahmen über die Zunahme der Erddichte nach innen angewiesen.

Wir wollen jetzt die Annahme machen, daß die Dichte ϱ der Erde von der Entfernung x vom Mittelpunkte der Erde nach dem Gesetze

$$\varrho = (b - x)\varkappa$$

gebildet ist. Hiernach würde also die Dichte im Mittelpunkte der Erde $b\varkappa$ sein und von dort aus gleichmäßig proportional der Entfernung x abnehmen.

Wir haben früher (§ 12 Gleichung 3) das Potential eines im Innern einer mit Agens erfüllten Kugel befindlichen Punktes abgeleitet zu

$$V = \frac{4\pi f}{a}\int_0^a \varrho\, x^2\, dx + 4\pi f\int_a^r \varrho\, x\, dx\,,$$

wo hier f die Gravitationskonstante, a die Entfernung des untersuchten Punktes vom Kugelmittelpunkt und r der äußere Radius der Kugel ist. Setzen wir den oben angenommenen Wert für ϱ ein, so wird

$$V = \frac{4\pi f}{a}\int_0^a (b-x)\varkappa \cdot x^2\, dx + 4\pi f\int_a^r (b-x)\varkappa \cdot x\, dx\,,$$

$$V = 4\pi f\varkappa\left[\frac{1}{a}\int_0^a (b-x)\,x^2\, dx + \int_a^r (b-x)\,x\, dx\right]$$

$$= 4\pi f\varkappa\left(\frac{a^3}{12} - \frac{a^2 b}{6}\right) + 4\pi f\varkappa\left(\frac{b r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right).$$

In diesem Ausdrucke hängt nur der erste Teil von dem Abstande a des untersuchten Punktes vom Mittelpunkte der Kugel ab, während der zweite konstant ist.

Die nach dem Mittelpunkte gerichtete Anziehungskraft ist gleich dem negativen Differentialquotient des Potentials nach dem Wege, also

$$K = -\frac{\partial V}{\partial a} = 4\pi f\varkappa\left(\frac{ab}{3} - \frac{a^2}{4}\right) = \pi f\varkappa a\left(\frac{4b}{3} - a\right).$$

Wollen wir untersuchen, ob an irgend einer Stelle diese Kraft einen maximalen Wert hat, so müssen wir noch den Differentialquotienten gleich Null setzen und erhalten so die Gleichung

$$\frac{dK}{da} = 4\pi f\varkappa\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right) = 0\,.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch den Wert

$$a = \frac{2b}{3}\,.$$

Der Wert von b ergibt sich durch folgende Überlegung. Es war angenommen

$$\varrho = (b - x)\varkappa .$$

Wir kennen die oberflächliche Dichte der Erde, also den Wert ϱ_0, den ϱ annimmt, wenn $x = r$ gleich dem Erdradius wird, also wird

$$\varrho_0 = (b - r)\varkappa .$$

Außerdem kennen wir die mittlere Dichte ϱ_m der Erde. Mit Hilfe derselben berechnet sich die Masse der Erde zu

$$M = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \varrho_m .$$

Außerdem können wir noch die Masse der Erde berechnen, indem wir sie aus konzentrischen Schichten von der Oberfläche $4\pi x^2$, der Schichtdicke dx und der Dichte $\varrho = (b - x)\varkappa$ berechnen durch das Integral

$$M = \int_0^r 4\pi x^2 \, dx \, (b - x)\varkappa$$

$$= \frac{4\pi}{3} b\varkappa r^3 - \pi\varkappa r^4 .$$

Setzen wir die beiden Werte für M einander gleich, so wird

$$\frac{4\pi}{3} b\varkappa r^3 - \pi\varkappa r^4 = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \varrho_m .$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$\varrho_m = \varkappa\left(b - \tfrac{3}{4} r\right) .$$

Dividieren wir diese Gleichung durch die oben gefundene

$$\varrho_0 = \varkappa(b - r) ,$$

so ergibt sich

$$\frac{\varrho_m}{\varrho_0} = \frac{b - \frac{3}{4} r}{b - r} ,$$

und hieraus

$$b = r \cdot \frac{\varrho_m - \frac{3}{4}\varrho_0}{\varrho_m - \varrho_0} .$$

Benutzen wir nun die bekannten Werte $\varrho_m = 5{,}5$, $\varrho_0 = 2{,}5$, so erhalten wir

$$b = 1{,}2\,r\,.$$

Mit Hilfe dieses Wertes ergibt sich endlich

$$a = 0{,}8\,r = \tfrac{4}{5}\,r\,.$$

Es hat also die anziehende Wirkung der Erde ihren Maximalwert, wenn wir um $\frac{1}{5}$ des Erdradius in das Erdinnere eingedrungen sind.

Interessant ist noch die Frage, wie groß unter der Annahme, daß die Dichte der Erde nach dem angegebenen Gesetze zunimmt, dieselbe im Erdmittelpunkte ist. Wir müssen dann noch $\varkappa$ ausrechnen mittels der Gleichung

$$\varrho_0 = \varkappa\,(b - r)\,,$$

woraus

$$\varkappa = \frac{\varrho_0}{b-r} = \frac{\varrho_0}{r\,\dfrac{\varrho_m - \frac{3}{4}\varrho_0}{\varrho_m - \varrho_0} - r} = \frac{4\,(\varrho_m - \varrho_0)}{r}$$

folgt.

Diesen Wert setzen wir in $\varrho = (b - x)\,\varkappa$ ein für den besonderen Wert $x = 0$ und erhalten, wenn wir diesen Wert mit ϱ_μ bezeichnen,

$$\varrho_\mu = b \cdot \varkappa = r \cdot \frac{\varrho_m - \frac{3}{4}\varrho_0}{\varrho_m - \varrho_0} \cdot \frac{4\,(\varrho_m - \varrho_0)}{r} = 4\,(\varrho_m - \tfrac{3}{4}\,\varrho_0)\,,$$

$$\varrho_\mu = 4\,(5{,}5 - \tfrac{3}{4} \cdot 2{,}5) = 14{,}5\,.$$

Es ist natürlich nicht zu vergessen, daß dieser Wert nur spekulatives Interesse hat, da die Voraussetzung die willkürliche Annahme über die Dichtigkeitsverteilung im Erdinnern ist.

Jedenfalls aber ist sicher, daß wir bei dem Hineingehen in das Erdinnere zuerst eine Zunahme der Anziehung der Erde zu erwarten haben, worauf dann wieder eine Abnahme erfolgen muß, denn im Erdmittelpunkte ist sicher wegen der allseitig symmetrischen Anziehung die Anziehungskraft gleich Null.

Über die Zunahme der Anziehung beim Hineingehen in das Erdinnere liegen naturgemäß nur wenige Untersuchungen vor. Von diesen sind die Pendelversuche von

Airy in den Steinkohlenbergwerken von Harton in Cornwall die bekanntesten und wichtigsten. Airy hat hier in einer Tiefe von 383 m eine Zunahme der Erdbeschleunigung um $\frac{1}{19200}$ ihres an der Oberfläche der Erde beobachteten Wertes gemessen. Wir hatten vorhin die Kraft im Innern der Erde unter der Annahme, daß die Dichte der Erde in demselben Verhältnis abnimmt, in welchem ihr Abstand vom Mittelpunkt zunimmt, berechnet zu

$$K = \pi f \varkappa a\left(\frac{4b}{3} - a\right).$$

Die hierin vorkommenden Werte für $\varkappa$ und b waren dann unter Berücksichtigung der Werte $\varrho_0 = 2{,}5$ und $\varrho_m = 5{,}5$ bestimmt zu

$$\varkappa = \frac{4(\varrho_m - \varrho_0)}{r} = \frac{12}{r},$$

$$b = r \cdot \frac{\varrho_m - \frac{3}{4}\varrho_0}{\varrho_m - \varrho_0} = 1{,}2\,r.$$

Es ist also

$$K = \pi f \cdot \frac{12}{r} \cdot a\left(\frac{4 \cdot 1{,}2\,r}{3} - a\right)$$

$$= \frac{12\pi f a}{r}(1{,}6\,r - a).$$

Setzen wir noch die besonderen Werte, welche K an der Oberfläche und in der Tiefe h annimmt, gleich K_0 und K_h, und setzen wir ferner noch $h = r - a$, also $a = r - h$, so wird

$$K_h = \frac{12\pi f(r-h)}{r}(0{,}6\,r + h),$$

$$K_0 = \frac{12\pi f r}{r}(0{,}6\,r),$$

und hieraus

$$\frac{K_h - K_0}{K_0} = \frac{(r-h)(0{,}6\,r + h) - 0{,}6\,r^2}{0{,}6\,r^2} = \frac{h(0{,}4\,r - h)}{0{,}6\,r^2}.$$

Bei den Versuchen in der Hartongrube war die Tiefe $h = 383$ m. Für diesen Wert von h und für $r = 6370000$ m berechnet sich dann

$$\frac{K_h - K_0}{K_0} = \frac{383\,(0{,}4 \cdot 6370000 - 383)}{0{,}6 \cdot 6370000^2} = \frac{1}{24900}.$$

Airy fand, wie schon oben angegeben, durch seine Pendelbeobachtungen den Wert $\frac{1}{19200}$. Bedenken wir aber, welche unsichere Voraussetzungen sowohl den Airyschen Versuchen, wie auch unseren Berechnungen zugrunde liegen, so können wir mit der erlangten Übereinstimmung sehr wohl zufrieden sein.

§ 24. Das Erdpotential außerhalb der Erde.

Leichter zu berechnen und zu übersehen ist die Potentialverteilung außerhalb der Erde, denn für alle Punkte außerhalb kann man die Gesamtmasse der Erde im Erdmittelpunkte vereinigt denken. Es betrage die gesamte Erdmasse M, so können wir diese numerisch berechnen, sie ist $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varrho_m$, wo ϱ_m wieder die mittlere Dichte $\varrho_m = 5{,}5$ bedeutet. Setzen wir $r = 6{,}370 \cdot 10^8$ cm, so wird

$$M = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 6{,}37^3 \cdot 10^{24} \cdot 5{,}5 = 5{,}97 \cdot 10^{27}\ \mathrm{g},$$

also ist das Potential für einen äußeren Punkt

$$V = f \cdot \frac{M}{R} = \frac{6{,}685 \cdot 10^{-8} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{27}}{R} = \frac{3{,}98 \cdot 10^{20}}{R}\ \mathrm{erg}.$$

(Es erscheint selbstverständlich, daß aus diesem Potentialwert auch wieder die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche berechnet werden kann, denn die Größe der Anziehungskraft beträgt

$$K = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{3{,}98 \cdot 10^{20}}{r^2}.$$

Setzen wir hierin wieder $r = 6{,}37 \cdot 10^8$, so erhalten wir

$$K = -\frac{3{,}98 \cdot 10^{20}}{6{,}37^2 \cdot 10^{16}} = 981\ \mathrm{dyn},$$

also beträgt die Beschleunigung der Masseneinheit $g = 981$ cm. Dieses Resultat überzeugt uns von der Richtigkeit unserer Berechnungen.)

Mit Hilfe dieses Potentialwertes können wir auch ein Bild von der Potentialverteilung im Raume, also auch besonders die Isopotentialflächen oder Niveauflächen konstruieren.

Um das Oberflächenpotential V_0 zu berechnen, setzen wir in dem Ausdruck R = Radius der Erde $= 6{,}37 \cdot 10^8$ ein und erhalten

$$V_0 = \frac{3{,}98 \cdot 10^{20}}{6{,}37 \cdot 10^8} = 6{,}248 \cdot 10^{11} \text{ erg}.$$

Das würde also bedeuten, daß diese Arbeit geleistet werden müßte, um die Masse von 1 g von der Erdoberfläche fort ins Unendliche, d. h. aus dem Anziehungsgebiete, dem Kraftfelde der Erde zu entfernen.*) Man übersieht diese Größe bequemer, wenn man sie in der technischen Maßeinheit Meterkilogramm ausrechnet. Es ist

$$1 \text{ mkg} = 100 \cdot 1000 \cdot 981 \text{ erg} = 9{,}81 \cdot 10^7 \text{ erg},$$

also beträgt die zu berechnende Arbeit

$$V_0 = \frac{6{,}248 \cdot 10^{11}}{9{,}81 \cdot 10^7} \text{ mkg} = 6370 \text{ mkg}.$$

Eine Kraftmaschine von der Leistung einer Pferdestärke würde diese Arbeit in $\frac{6370}{75} = 85$ Sekunden leisten können. Dieselbe Arbeit V_0 wird aber auch der Erde zugeführt, wenn ein Körper von der Masse 1 g aus dem Weltenraume auf die Erde fällt. Da nun beim Fall eines solchen Körpers die ganze Energie in Wärme umgewandelt wird, und da zwischen der Wärmemenge und der Arbeit die Beziehung besteht. daß

$$1 \text{ erg} = 2{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ cal}$$

*) Es ist wohl zu beachten, daß wir es beim Gravitationsfeld mit einer Anziehung nach dem Mittelpunkte zu tun haben, daß also hier zur Entfernung aus dem Felde Arbeit geleistet werden muß.

sind, so folgt, daß hierbei die Erde die Wärmemenge

$$Q = V_0 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-8} = 6{,}248 \cdot 10^{11} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ cal}$$
$$= 14\,995 \text{ cal} = 15 \text{ Cal}$$

zugeführt werden würde.

Aus diesem Werte ergibt sich sehr anschaulich, welche enorme Wärmemenge in den Weltenraum von der Erde schon ausgestrahlt ist, wenn man die Annahme zuläßt, daß sich die Erde aus kleinen voneinander unendlich weit entfernten Teilchen durch Zusammenballen gebildet hat. Es erscheint ferner verständlich, wenn behauptet wird, daß die von der Sonne ausgestrahlte Wärme ihre Ersatzquelle darin findet, daß fortwährend meteoritische Massen auf die Sonne fallen. Man müßte hier das Oberflächenpotential der Sonne ausrechnen.

§ 25. Die Sternschnuppen.

Die Entstehung der Sternschnuppen ist ebenfalls aus der Größe des Erdpotentials erklärlich. Bekanntlich sind die Sternschnuppen meteoritische, aus dem Weltenraume stammende Massen, die in das Kraftfeld der Erde gelangt sind, und hier infolge der Eigenbewegung und der Anziehung durch die Erde mit großer Geschwindigkeit in die Atmosphäre gelangen. Beim Eintreten in die Atmosphäre wird ihre durch ihre Geschwindigkeit erlangte Bewegungsenergie infolge des Luftwiderstandes in Wärme umgesetzt, wodurch die meteoritischen Massen ins Glühen geraten und meistens in feinsten Staub zerplatzen.

Die Höhe der beobachteten Sternschnuppen wird auf durchschnittlich 70—80 km geschätzt. Wir wollen annehmen, daß die Sternschnuppen nur infolge des Kraftfeldes der Erde ihre Bewegungsenergie erlangen, und hieraus soll die Temperatur berechnet werden, die sie in der Höhe von 80 km erlangen, wenn alle Bewegungsenergie in Wärme umgesetzt wird.

Es beträgt das äußere Erdpotential

$$V = \frac{3{,}98 \cdot 10^{20}}{R} \text{ erg.}$$

Für einen in der Höhe von 80 km über der Erdoberfläche befindlichen Punkt muß $R = 6370 + 80 = 6450$ km $= 6{,}45 \cdot 10^8$ cm gesetzt werden, also ist

$$V = \frac{3{,}98 \cdot 10^{20}}{6{,}45 \cdot 10^8} = 6{,}17 \cdot 10^{11} \text{ erg.}$$

In Wärme umgewandelt, erhalten wir

$$Q = 6{,}17 \cdot 10^{11} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-8} = 1{,}48 \cdot 10^4 \text{ cal} = 14800 \text{ cal.}$$

Bestände die in die Atmosphäre fallende Masse der Sternschnuppen aus Wasser, so würde jede Masseneinheit um 14800° C erwärmt werden. Da die spezifische Wärme der Meteoriten auf etwa 0,2 zu schätzen ist, so folgt, wenn ihre Bewegungsenergie plötzlich in Wärme verwandelt würde, eine Temperaturerhöhung von ungefähr 70000° C. Da aber der Meteorit auch gleichzeitig die Luft, durch welche er in seiner Bewegung aufgehalten wird, mit erwärmt, da er also hierdurch selbst eine Abkühlung erfährt, wird tatsächlich diese Temperatur nicht annähernd erreicht. Der berechnete Wert erklärt uns aber das plötzliche helle Aufleuchten der Sternschnuppen bei ihrem Eintreten in die Atmosphäre.

§ 26. Endgeschwindigkeit eines freifallenden Körpers.

Zum Schluß für diese Art der Aufgaben möge noch berechnet werden, mit welcher Geschwindigkeit ein in das Kraftfeld der Erde eindringender und auf die Erdoberfläche fallender Körper auf der Erde ankommen würde, wenn er nicht durch den Luftwiderstand aufgehalten würde.

Das Oberflächenpotential der Erde ist früher zu $V_0 = 6{,}248 \cdot 10^{11}$ erg berechnet. Das ist die Energiemenge, welche eine auf die Erdoberfläche fallende Masseneinheit erlangt hat, wenn sie aus dem Unendlichen auf die Erde fällt. Da die Bewegungsenergie durch den Ausdruck $m \cdot \frac{v^2}{2}$ bestimmt ist, hier aber $m = 1$ g beträgt, so folgt

$$\frac{v^2}{2} = 6{,}248 \cdot 10^{11},$$

$$v^2 = 1{,}2496 \cdot 10^{12},$$

$$v = \sqrt{1{,}2496} \cdot 10^6 = 1{,}118 \cdot 10^6 \text{ cm/sec},$$

$$v = 11{,}18 \text{ km/sec}.$$

Es würde also ein aus dem Unendlichen frei auf die Erde ohne Luftwiderstand herabfallender Körper auf der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit von 11,18 km/sec ankommen. Mit derselben Geschwindigkeit müßte demnach auch ein Körper senkrecht nach oben geschossen werden, wenn er vollständig (ohne Luftwiderstand) aus dem Kraftfelde der Erde herausgebracht werden sollte.

§ 27. Das Eigenpotential der Erde.

Die Berechnung der durch das Zusammenballen der Erdmassen verloren gegangenen Energie läßt sich natürlich nur ausführen, wenn wir über die Verteilung der Dichte etwas genaueres wüßten. Trotzdem erscheint es nicht uninteressant, den Energiebetrag zu berechnen unter der Annahme, daß die Erde eine homogene Kugel sei, denn es ist sicher, daß der Energiebetrag in Wirklichkeit den so berechneten noch übertrifft, weil die Dichte der Erde im Innern, also nach dem Mittelpunkte zu, größer ist als in der Gegend der Oberfläche.

Wir berechnen zuerst den Energiebetrag, der nötig ist, damit eine Kugel vom Radius r durch Anlagern von Massenteilen um eine Schicht von der Dicke dr zunimmt.

Beträgt die Dichte der in Rechnung kommenden Kugel ϱ, so ist ihre Gesamtmasse $\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho$. Die zur Bildung einer Kugelschale von der Dicke dr erforderliche Masse beträgt

$$4\pi r^2 dr \cdot \varrho .$$

Das Potential an der Oberfläche der ursprünglichen Kugel ist

$$V = f\frac{m}{r} = f \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho}{r} = \frac{4}{3}\pi f r^2 \varrho .$$

Also ist zur Anlagerung der Masse $4\pi r^2 dr \varrho$, die aus dem Unendlichen auf die Kugeloberfläche gebracht wird, die Arbeit

$$A = \frac{4}{3}\pi f r^2 \varrho \cdot 4\pi r^2 dr \cdot \varrho = \frac{16}{3} f \cdot \pi^2 \varrho^2 r^4 dr$$

erforderlich.

Soll nun die Arbeit berechnet werden, die zur Anlagerung der Schicht von der endlichen Dicke s erforderlich ist, so ist der Ausdruck A zu integrieren zwischen den Grenzen

a und $a + s$, wenn a der ursprüngliche Radius der Kugel ist. Es ist also dann

$$A = \frac{16}{3} f \pi^2 \varrho^2 \int_a^{a+s} r^4 \, dr$$
$$= \frac{16}{15} f \pi^2 \varrho^2 \left[(a+s)^5 - a^5\right] .$$

Um endlich den zum Aufbau der gesamten Kugel notwendigen Arbeitsbetrag zu berechnen, haben wir nur noch $a = 0$ zu setzen, also anzunehmen, daß die ursprüngliche Kugel unendlich klein sei, dann ist

$$A = \frac{16}{15} f \pi^2 \varrho^2 s^5 .$$

Diesen Ausdruck nennen wir das Eigenpotential eines Körpers. Für die Erde haben wir in diesem Ausdruck die Werte $f = 6{,}66 \cdot 10^{-8}$, $\varrho = 5{,}5$, $s = 6{,}37 \cdot 10^8$ einzusetzen und erhalten

$$A = \frac{16}{15} \cdot 6{,}66 \cdot 10^{-8} \cdot \pi^2 \cdot 5{,}5^2 \cdot 6{,}37^5 \cdot 10^{40}$$
$$= 2{,}224 \cdot 10^{39} \text{ erg.}$$

Dieser Arbeitsbetrag entspricht einer Wärmemenge von

$$Q = 2{,}224 \cdot 10^{39} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ cal}$$
$$= 5{,}34 \cdot 10^{31} \text{ cal}$$
$$= 5{,}34 \cdot 10^{28} \text{ Cal.}$$

Bedenkt man, das 1 kg bester Steinkohle beim Verbrennen eine Wärmemenge von 8000 Cal liefert, so wären demnach

$$S = \frac{5{,}34 \cdot 10^{28}}{8 \cdot 10^3} = 6{,}7 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 6{,}7 \cdot 10^{21} \text{ Tonnen}$$

Steinkohlen erforderlich, um beim Verbrennen dieselbe Wärmemenge zu liefern, wie bei der Bildung der Erde produziert ist. Eine solche Steinkohlenmenge in die Form einer einzigen großen Kohlenkugel vom Radius R Meter gebracht, würde, da das spezifische Gewicht der Steinkohle 1,5 beträgt, das Gewicht

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \cdot 1{,}5$$

haben, welches gleich dem oben berechneten Gewicht von $6,7 \cdot 10^{21}$ Tonnen ist, also ist

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 \cdot 1,5 = 6,7 \cdot 10^{21},$$

folglich

$$R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 6,7 \cdot 10^{21}}{4 \cdot \pi \cdot 1,5}}\, m = 10200 \text{ km}.$$

Die Steinkohlenkugel müßte also einen Radius haben, der ungefähr $1^1/_2$ mal so groß wie der Erdradius selbst ist.

Es ist schon gesagt, daß die bei der Bildung der Erde verloren gegangene Energie wegen der größeren Dichte des Erdinnern noch größer sein muß, doch können wir keine genaueren Berechnungen hierüber anstellen, da uns die Massenverteilung unbekannt ist.

§ 28. Verteilung des Potentials der Erde außerhalb der Erde.

Die Frage nach der Verteilung des Potentials außerhalb der Erde ist von weiterer Bedeutung. Zu dem Zwecke wollen wir die folgende Aufgabe lösen: Um welche Strecke müssen wir uns von der Erdoberfläche erheben, damit wir auf eine Niveaufläche kommen, auf der das Potential um 1 erg niedriger ist, als auf der Erdoberfläche?

Auf der Erdoberfläche ist das Potential

$$V_0 = \frac{3,98 \cdot 10^{20}}{r} \text{ erg}.$$

Erheben wir uns um die Strecke h, so beträgt dort das Potential

$$V_h = \frac{3,98 \cdot 10^{20}}{r+h},$$

und da dieses um 1 erg weniger sein soll als V_0, so muß sein

$$V_h = V_0 - 1,$$

oder

$$\frac{3,98 \cdot 10^{20}}{r+h} = \frac{3,98 \cdot 10^{20}}{r} - 1.$$

Hieraus berechnet sich leicht der Wert

$$h = \frac{r^2}{3,98 \cdot 10^{20} - r}.$$

Setzen wir hier den Wert $r = 6{,}370 \cdot 10^8$ ein, so wird

$$h = \frac{6{,}370^2 \cdot 10^{16}}{3{,}98 \cdot 10^{20} - 6{,}370 \cdot 10^8}.$$

Es ist klar, daß wir im Nenner den zweiten Ausdruck gegen den ersten vollständig vernachlässigen können, so daß wir schreiben können

$$h = \frac{6{,}370^2 \cdot 10^6}{3{,}98 \cdot 10^{20}} = \frac{6{,}370^2}{3{,}98 \cdot 10^4} \text{ cm.}$$

Ausgerechnet ergibt das den Wert

$$h = \tfrac{1}{981} \text{ cm.}$$

Dieser Wert ist ebenso auffallend wie selbstverständlich, denn wenn wir die Masse von 1 g um die Strecke von $\frac{1}{981}$ cm heben, so leisten wir nach unserer Grunddefinition die Arbeit $A = \text{Kraft} \times \text{Weg}$. Die zu überwindende Kraft ist die Schwerkraft, welche auf ein Gramm mit der Kraft von 981 dyn wirkt, folglich ist die geleistete Arbeit

$$A = 981 \text{ dyn} \cdot \tfrac{1}{981} \text{ cm} = 1 \text{ erg.}$$

Um diesen Betrag soll aber auch das Potential nach dem Wortlaut unserer Aufgabe abnehmen, damit wir auf die nächste Niveaufläche kommen.

Der allgemein ausgerechnete Wert für h

$$h = \frac{r^2}{3{,}98 \cdot 10^{20} - r}$$

zeigt uns ferner noch, daß in größeren Höhen die Niveauflächen weiter voneinander entfernt sind. Setzen wir nämlich statt r den Wert $n \cdot r$, wo n ein Zahlenwert ist, der angibt, wievielmal so weit ein Körper vom Mittelpunkt entfernt ist, als die Erdoberfläche, so ergibt sich dann der Wert

$$h' = \frac{n^2 r^2}{3{,}98 \cdot 10^{20} - nr}.$$

Vergleichen wir diesen Wert mit dem Werte für h, so erhalten wir

$$\frac{h'}{h} = \frac{n^2 r^2}{3{,}98 \cdot 10^{20} - nr} \cdot \frac{3{,}98 \cdot 10^{20} - r}{r^2}.$$

Die beiden zweigliedrigen Ausdrücke im Zähler und im Nenner sind, wegen des überwiegend großen Wertes ihres ersten Teiles gegen den zweiten, als gleich anzusehen, solange n nicht einen außerordentlich großen Wert hat. Wir können also die zweigliedrigen Faktoren im Zähler und Nenner gegeneinander fortlassen und erhalten

$$(1) \qquad \frac{h'}{h} = n^2, \quad \text{oder} \quad h' = n^2 \cdot h \,.$$

Das heißt, daß in $n$facher Entfernung die Abstände der Niveauflächen dem Quadrate der Abstände, in Erdradien gemessen, proportional sind. Es würden also zwei um ein erg verschiedene Niveauflächen im doppelten Abstande des Erdradius um den vierfachen Betrag so weit voneinander entfernt sein, wie auf der Erdoberfläche, also um $\frac{4}{981}$ cm. In einer Entfernung des 31 fachen Erdradius beträgt der Abstand der Niveauflächen von 1 erg Differenz also fast genau 1 cm, genauer $\frac{961}{981}$ cm.

Daß die Niveauflächen mit gleicher Niveaudifferenz einen Abstand voneinander haben, welcher dem Quadrate der Entfernung vom Erdmittelpunkte proportional ist, führt uns unmittelbar auf den Kraftbegriff wieder zurück. Wir wissen, daß die Kraft dem Abstande der Niveauflächen umgekehrt proportional ist. Wenn nun die Niveauflächenabstände nach unserer eben gemachten Ableitung dem Quadrate der Entfernung direkt proportional sind, so ergibt sich hieraus wieder, daß die Anziehungskraft dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Das ist natürlich kein neues Resultat, sondern beweist uns nur, daß wir bei unseren Ableitungen und Rechnungen nicht von der richtigen Fährte abgewichen sind.

§ 29. **Das homogene Kraftfeld der Erde.**

Wenn in einem Kraftfelde die Kraft an allen Stellen dieselbe Größe und dieselbe Richtung hat, so wird das Kraftfeld „homogen" genannt. In einem solchen Kraftfelde würden demnach alle Kraftlinien parallele gerade Linien und alle Niveauflächen parallele und äquidistante Ebenen sein.

Es ist ohne weiteres klar, daß ein Kraftfeld, welches von Kräften herrührt, die dem Quadrate der Entfernung

umgekehrt proportional sind, wie z. B. das Gravitationsfeld, nur bei besonderer Anordnung der Masse ein homogenes Kraftfeld sein kann, da sowohl im Ausdrucke für die Kraft

$$K = f \cdot \frac{m}{r^2},$$

wie in dem für das Potential

$$V = f \cdot \frac{m}{r}$$

die Größe r vorkommt, aus welcher sich ergibt, daß beide Ausdrücke vom Orte abhängig sind, also nicht konstant sein können.

Trotzdem können wir ein bestimmt abgegrenztes Gebiet des Kraftfeldes der Erde mit großer Annäherung als homogen ansehen, wenn wir nur angeben, wie groß der bei der Abgrenzung zugelassene Fehler sein darf. Wir wollen jetzt die Bedingung aufstellen, daß bei der Abgrenzung des homogenen Kraftfeldes an keiner Stelle eine Abweichung vorkommt, die größer ist als 10^{-6} des wirklichen Wertes. Es soll also die Neigung der an den äußersten Grenzen des Gebietes gezogenen Kraftlinien nicht größer als 10^{-6} sein, ferner sollen die Abstände zweier Niveauflächen voneinander (denn diese bestimmen ja die Kraftgröße) an den Grenzen des Feldes und in der Mitte nicht mehr als 10^{-6} des Abstandes selbst voneinander verschieden sein. Die erste Bedingung begrenzt das Gebiet des Kraftfeldes seitlich, die zweite nach oben.

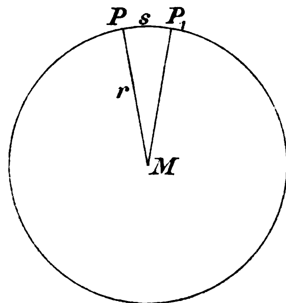


Fig. 24.

Beim Gravitationsfelde der Erde fallen die Kraftlinien mit den Erdradien zusammen. Stellt demnach Figur 24 die an der Erdoberfläche anliegende Niveaufläche dar, ist M der Mittelpunkt der Erde, und sind P und P_1 die Punkte, die das abgegrenzte Gebiet des Kraftfeldes bestimmen, so sollen nach unserer Bedingung die Richtungen MP und MP_1 einen Winkel einschließen, dessen arcus $< 10^{-6}$ ist. Wir nennen $PP_1 = s$

und $MP = r$, so soll also sein $\frac{s}{r} < 10^{-6}$, woraus folgt

$$s < r \cdot 10^{-6}.$$

Da nun r der Erdradius $r = 6{,}37 \cdot 10^8$ cm ist, so folgt

$$s < 6{,}37 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} \text{ cm},$$

oder

$$s < 6{,}37 \text{ m}.$$

Zur Abgrenzung des Feldes nach oben benutzen wir die früher abgeleitete Gleichung (§ 28, 1)

$$h' = n^2 h.$$

Hierin bedeuten h' und h die Abstände zweier um 1 erg voneinander verschiedener Niveauflächen, bei denen der erste Abstand unmittelbar an der Erdoberfläche, der zweite im $n$fachen Abstande des Erdradius vom Erdmittelpunkte gerechnet ist. Sind dieses die hier gewählten äußeren Grenzen, so lautet unsere Bedingung

$$\frac{h' - h}{h} < 10^{-6}.$$

Setzen wir den obigen Wert für h ein, so ergibt sich daraus, weil $\frac{h' - h}{h} = n^2 - 1$ ist, die Bedingung

$$n^2 - 1 < 10^{-6} \quad \text{oder} \quad n < \sqrt{1 + 10^{-6}},$$

und da mit hinreichender Genauigkeit

$$\sqrt{1 + 10^{-6}} = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

ist, so erhalten wir

$$n < 1 + \tfrac{1}{2} 10^{-6}.$$

Wählen wir nun die untere Niveaufläche an der Erdoberfläche, so hat die obere vom Erdmittelpunkte den Abstand

$$r(1 + \tfrac{1}{2} 10^{-6}),$$

also ist sie von der Erdoberfläche $\frac{1}{2} r \cdot 10^{-6}$ entfernt. Für r den Wert $6{,}37 \cdot 10^8$ cm eingesetzt, ergibt für die Höhe p

der das homogene Kraftfeld nach oben begrenzenden Niveaufläche

$$p < \tfrac{1}{2} \cdot 6{,}37 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6}\ \text{cm},$$
$$p < 3{,}185\ \text{m}.$$

Ein Kraftfeld an der Erdoberfläche, bei dem die Abweichung von der Homogeneität nicht größer als 10^{-6} beträgt, hat demnach die horizontale Ausdehnung von 6 m und die vertikale Ausdehnung von 3 m. Lassen wir eine Abweichung von 10^{-4}, also von $^1/_{10}$ Prozent zu, so würde sich in derselben Weise eine Breitenausdehnung von 600 m und eine Höhenausdehnung von 300 m ergeben.

In einem besonderen Falle kann auch ein durch Gravitationskräfte hervorgerufenes Feld ein vollständig homogenes Kraftfeld sein.

Dieser Fall tritt ein, wenn eine mit Masse homogen erfüllte Kugel einen exzentrisch belegenen kugelförmigen Hohlraum hat. Innerhalb dieses Hohlraumes entsteht ein homogenes Kraftfeld. Wir behandeln diese Aufgabe in § 32, nachdem im nächsten Paragraphen das zusammengesetzte Feld behandelt ist.

§ 30. Das zusammengesetzte Feld.

Wird ein Kraftfeld durch zwei Massen beeinflußt, die nach dem Gravitationsgesetze wirken, so entsteht ein zusammengesetztes Feld. Wir nehmen wieder an, daß die Massen aus homogenen Kugeln oder aus Kugeln bestehen, die aus konzentrischen Schichten zusammengesetzt sind, damit wir ihre Wirkung auf einen äußeren Punkt ersetzen können durch die Wirkung ihrer Massen, die im Mittelpunkte der Kugeln vereinigt sind.

Es seien die beiden Massen m_1 und m_2. Der Abstand ihrer Mittelpunkte sei a. Wäre nur die Masse m_1 vorhanden, so wäre das Potential des Punktes P, der von m_1 den Abstand r_1 haben möge,

$$V_1 = f\frac{m_1}{r_1}.$$

Die Masse m_2 erzeugt in derselben Weise das Potential

$$V_2 = f\frac{m_2}{r_2}.$$

Wir finden nach früheren Auseinandersetzungen über die Zusammensetzung der Kräfte (§ 3) das Gesamtpotential V durch Addition der beiden Teilpotentiale. Es ist also

$$V = f\frac{m_1}{r_1} + f\frac{m_2}{r_2}.$$

Da aber f in beiden Fällen dieselbe Gravitationskonstante ist, so können wir schreiben

$$V = f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right).$$

Auf dieses zusammengesetzte Feld finden die Begriffe Niveauflächen, Kraftlinien, Kraftröhren usw. sinngemäße Anwendung.

§ 31. Das Feld von Erde und Sonne.

Wir wollen uns nur mit einem speziellen Falle befassen, nämlich mit dem durch die Erde und durch die Sonne hervorgerufenen Felde. Um das Sonnenpotential für einen äußeren Punkt zu kennen, müssen wir erst die Masse M der Sonne berechnen. Das geschieht auf folgende Weise. Da sich die Erde um die Sonne als ihren Zentralkörper in einer Bahn, die wir als kreisförmig ansehen wollen, dreht, so wirken auf die Erde die beiden einander gleichen Kräfte, nämlich erstens die durch die Bahnbewegung erzeugte Zentrifugalkraft K_1 und zweitens die durch die Massenanziehung von Sonne und Erde bewirkte Zentralkraft K_2, welche sich gegenseitig aufheben müssen. Beträgt die Masse der Erde m, der Radius ihrer Bahn R und die Umlaufszeit T, so ist die Zentrifugalkraft

$$K_1 = m \cdot \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Nach dem Gravitationsgesetze beträgt die Massenanziehung zwischen der Sonne (M) und der Erde (m)

$$K_2 = f \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}.$$

Wir setzen $K_1 = K_2$ und erhalten

$$f \cdot \frac{Mm}{R^2} = m \cdot \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

woraus folgt

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{f \cdot T^2}.$$

Die Entfernung der Erde von der Sonne beträgt $R = 1{,}495 \cdot 10^{13}$ cm, die siderische Umlaufszeit der Erde um die Sonne beträgt $T = 365$ Tage $6^h\,9^m\,10^{sec} = 3{,}1558 \cdot 10^7$ sec. Diese Zahlenwerte und den bekannten Wert der Gravitationskonstanten $f = 6{,}66 \cdot 10^{-8}$ eingesetzt, ergeben

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot 1{,}495^3 \cdot 10^{39}}{6{,}66 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}1558^2\, 10^{14}}$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot 1{,}495^3}{6{,}66 \cdot 3{,}1558^2} \cdot 10^{33} = 1{,}9888 \cdot 10^{33}\,\text{g}.$$

Für die Masse der Erde haben wir früher schon den Wert $m = 5{,}97 \cdot 10^{27}$ g bestimmt.

Das durch Sonne und Erde hervorgerufene zusammengesetzte Kraftfeld hat in dem Punkte P, der von der Sonne den Abstand r_1, von der Erde den Abstand r_2 hat, den Wert

$$V = f \cdot \left(\frac{M}{r_1} + \frac{m}{r_2}\right).$$

Nach Einsetzen der Werte für f, M und m folgt

$$V = 6{,}66 \cdot 10^{-8} \left(\frac{1{,}9888 \cdot 10^{33}}{r_1} + \frac{5{,}97 \cdot 10^{27}}{r_2}\right),$$

wofür wir auch schreiben können

$$V = 3{,}976 \cdot 10^{20} \left(\frac{3{,}33 \cdot 10^5}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Aus diesem Werte folgt, daß im allgemeinen der erste Summand, der von der Anziehung der Sonne herrührt, einen wesentlich größeren Beitrag zum Gesamtpotential liefert, als der zweite von der Anziehung der Erde herrührende. Nur wenn r_2 im Vergleich zu r_1 sehr klein ist, hat der Beitrag

des Erdpotentials zum Gesamtpotential eine nennenswerte Bedeutung. Es sieht das gesamte Kraftfeld so aus, als ob es nur von der Sonne herrührte, nur in der Nähe der Erde findet eine merkbare Deformation des Feldes statt.

Diese Verhältnisse durch eine Zeichnung zu veranschaulichen hat keinen Wert, da bei der Wahl der richtigen Größenverhältnisse die Zeichnung unmöglich ist, und da andererseits eine Zeichnung mit verschobenen Größenverhältnissen ein ganz verkehrtes Bild geben würde. Bei der Elektrostatik werden wir die Zeichnung von zusammengesetzten Kraftfeldern den richtigen Größenverhältnissen entsprechend ausführen.

Wir wollen zum Schluß für dieses Kapitel nur noch die Punkte auf der Verbindungslinie von M und m untersuchen. Für diese ist, wenn der Abstand von Erde und Sonne R beträgt, $r_1 + r_2 = R$, also $r_2 = R - r_1$. Mit Benutzung dieses Ausdruckes nimmt das Potential die Form an

$$V = f \cdot \left(\frac{M}{r_1} + \frac{m}{R - r_1}\right).$$

Dieser Ausdruck ist nur noch eine Funktion von r_1, er erhält dann einen Minimalwert, wenn $\frac{dV}{dr_1} = 0$ ist, wenn also

$$f\left(-\frac{M}{r_1^2} + \frac{m}{(R - r_1)^2}\right) = 0$$

ist. Das ergibt

$$f\frac{M}{r_1^2} = f\frac{m}{(R - r_1)^2}.$$

Die Ausdrücke auf den beiden Seiten der Gleichung sind nichts anderes als die auf die Masseneinheit von der Sonne und der Erde ausgeübten Anziehungskräfte. Wenn dieselben gleich sind, so bleibt der Massenpunkt offenbar in Ruhe. Die Frage nach dem Minimalwert des Potentials ist demnach identisch mit der Frage nach der Gleichgewichtslage eines Massenpunktes. Auch die Maximalwerte des Potentials entsprechen den Punkten des Gleichgewichts, denn auch für sie lautet die Bedingung $\frac{\partial V}{\partial s} = 0$, welche Bedin-

gung nichts anderes ausdrückt, als daß in diesem Punkte keine Kraft wirkt, oder daß die wirkenden Kräfte sich gegenseitig aufheben. Der Unterschied erklärt sich daraus, daß bei den anziehenden Kräften die Kräfte immer in der Richtung nach den Punkten höheren Potentials wirken. Hat also ein Potential einen Maximalwert, so ist das Gleichgewicht ein stabiles, während dasselbe beim Minimalwert des Potentials ein labiles Gleichgewicht ist. Bei abstoßenden Kräften (z. B. in der Elektrostatik) entsprechen umgekehrt die Maximalwerte des Potentials den Punkten labilen Gleichgewichts und die Minimalwerte des Potentials den Punkten stabilen Gleichgewichts.

Um den Punkt des (in diesem Falle also labilen) Gleichgewichts auf der Verbindungslinie der beiden Massen zu finden, lösen wir die Gleichung

$$f \cdot \frac{M}{r_1^2} = f \cdot \frac{m}{(R - r_1)^2}$$

für r_1 auf. Die Gleichung ist quadratisch und ergibt die Lösungen

$$r_1 = \frac{R\sqrt{M}}{\sqrt{M} \pm \sqrt{m}}.$$

Da aber der Punkt zwischen den beiden Massen liegen soll, so muß $r_1 < R$ werden, folglich kann im Nenner nur das Pluszeichen gebraucht werden. Es ist also

$$r_1 = \frac{R\sqrt{M}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}}.$$

Setzen wir hier die bekannten Zahlenwerte für Sonne und Erde ein, so erhalten wir

$$r_1 = \frac{1{,}495 \cdot 10^{13} \sqrt{19{,}888 \cdot 10^{32}}}{\sqrt{19{,}888 \cdot 10^{32}} + \sqrt{59{,}7 \cdot 10^{26}}} = 1{,}4924 \cdot 10^{13}\,\mathrm{cm}.$$

Die Entfernung des Punktes von der Masse m (der Erde) beträgt

$$R - r_1 = 1{,}495 \cdot 10^{13} - 1{,}4924 \cdot 10^{13}$$
$$= 2{,}6 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm} = 260 \cdot 10^{8}\,\mathrm{cm}.$$

Bedenkt man, daß der Erdradius nur den Wert

$$6{,}37 \cdot 10^8\,\mathrm{cm}$$

hat, so ergibt sich, daß schon in der vierzigfachen Entfernung des Erdradius ein dort befindlicher ruhender Massenpunkt sich in labiler Gleichgewichtslage zwischen Erde und Sonne befinden würde.

§ 32. Das homogene Feld im Innern einer Hohlkugel.

Am Schlusse des § 29 war angedeutet, daß durch eine mit einem kugelförmigen Hohlraume versehene Kugel innerhalb dieses Hohlraumes ein homogenes Kraftfeld erzeugt

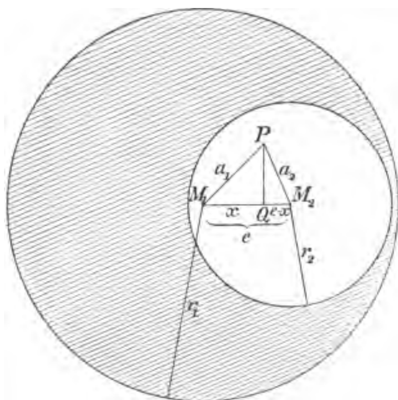


Fig. 25.

würde. In Figur 25 bedeutet der schraffierte Teil den mit Masse erfüllten Raum. Der Mittelpunkt der äußeren Kugel sei M_1, der Mittelpunkt des Hohlraumes sei M_2. Der Abstand beider Mittelpunkte sei $M_1 M_2 = e$. Die entsprechenden Radien seien r_1 und r_2. Es sei ferner P ein Punkt innerhalb des Hohlraumes mit den Abständen $PM_1 = a_1$ und $PM_2 = a_2$. Fällen wir von P auf $M_1 M_2$ das Lot PQ, so möge $M_1 Q = x$ gesetzt werden, so daß also $M_2 Q = e - x$ ist.

Um das Potential des Punktes P zu bestimmen, denken wir uns das innerhalb des Hohlraumes belegene Feld zu-

sammengesetzt aus dem Kraftfelde, welches von der ganzen Vollkugel mit dem Mittelpunkte M_1 erzeugt wird, deren Dichte konstant gleich ϱ sei, und von dem Hohlraum, der dann angesehen werden kann als eine Vollkugel mit der konstanten negativen Dichte $-\varrho$. Das Potential eines im Innern einer Vollkugel mit konstanter Dichte ϱ gelegenen Punktes ist nach § 12, 5

$$V = 2\pi f \varrho \left(r^2 - \frac{a^2}{3}\right).$$

Das Potential des Punktes P ist daher gleich

$$V = 2\pi f \varrho \left(r_1^2 - \frac{a_1^2}{3}\right) - 2\pi f \varrho \left(r_2^2 - \frac{a_2^2}{3}\right)$$
$$= 2\pi f \varrho (r_1^2 - r_2^2) - \tfrac{2}{3}\pi f \varrho (a_1^2 - a_2^2).$$

Bedenken wir, daß

$$M_1 P^2 - M_2 P^2 = M_1 Q^2 - M_2 Q^2$$

ist, daß also

$$a_1^2 - a_2^2 = x^2 - (e - x)^2 = 2ex - e^2$$

ist, so folgt

$$V = 2\pi f \varrho (r_1^2 - r_2^2) - \tfrac{2}{3}\pi f \varrho (2ex - e^2),$$

oder

$$V = 2\pi f \varrho (r_1^2 - r_2^2) + \tfrac{2}{3}\pi f \varrho e^2 - \tfrac{4}{3}\pi f \varrho e x.$$

Hieraus erkennen wir, daß der ganze Ausdruck mit Ausnahme des letzten Gliedes nur konstante Glieder enthält, nur im letzten Gliede kommt die Variable x und zwar in der ersten Potenz vor.

Bei Berechnung der Kraft bestimmen wir den nach x gebildeten Differentialquotienten des Potentials, d. h. wir bestimmen die Kraft, die in der Richtung von x wirkt. Wir erhalten

$$K = -\frac{\partial V}{\partial x} = \tfrac{4}{3}\pi f \varrho e = f \cdot \tfrac{4}{3}\pi e^3 \varrho \cdot \frac{1}{e^2}.$$

$\frac{4}{3}\pi e^3 \varrho$ ist die Masse einer Kugel mit dem Radius e, deren Dichte konstant gleich ϱ ist. Nennen wir diese Massenkugel m, so wird

$$K = \frac{f \cdot m}{e^2}.$$

Wir sehen, daß die Kraft konstant ist. Die mit exzentrischem Hohlraume versehene Hohlkugel wirkt auf einen im Innern des Hohlraumes befindlichen Massenpunkt parallel der Verbindungslinie der Mittelpunkte der äußeren und der inneren Kugel in allen Punkten so, wie eine mit dem Mittelpunkte M_1 und dem Radius $M_1 M_2$ konstruierte Vollkugel mit derselben Massendichte auf den Punkt M_2 wirken würde.

III. Teil.

Elektrostatik.

---

§ 33. Das Agens „Elektrizität“.

Während das Agens Masse eine mit einem Körper untrennbar verbundene Größe ist, die wir als einen wesentlichen Bestandteil des Körpers ansehen, und ohne die wir uns kaum einen Körper vorstellen können, ist das Agens Elektrizität eine Größe, die einem Körper erst durch die Einwirkung eines anderen, oder durch die Wirkung verschiedener Kräfte in mehr oder weniger starkem Grade mitgeteilt wird. Andererseits ist die Wirkung der Elektrizität immer gebunden an das Vorhandensein eines Körpers; jedenfalls können wir die Elektrizität erst wahrnehmen, oder auch nur begreifen, wenn die Elektrizität an einen Körper gebunden ist und nun einen Zustand desselben oder eines anderen Körpers hervorruft, der ohne das Vorhandensein der Elektrizität anders wäre. Daher können wir die Elektrizität auch an der an einem Körper auftretenden Zustandsveränderung beobachten und messen. Da die Erzeugung einer Zustandsveränderung immer einen Arbeitsaufwand erfordert, so erscheint wiederum dieser Arbeitsaufwand als Maß des elektrischen Zustandes besonders geeignet. Aus diesem Grunde hat die Lehre vom Potential für die Elektrostatik eine hervorragende Wichtigkeit, da ja das Potential nichts anderes als ein Arbeitsbegriff ist.

Die einfachen Tatsachen, daß gleichartig elektrische Körper eine Abstoßungskraft, entgegengesetzt elektrische eine Anziehungskraft aufeinander ausüben, mögen als bekannt vorausgesetzt werden. Desgleichen mag der Unterschied

zwischen Leitern und Nichtleitern im Sinne des gewöhnlichen Sprachgebrauchs bekannt sein. Betreffs des letzten Unterschiedes mag nur noch hervorgehoben werden, daß wir hier nur von absolut leitenden Körpern als solchen reden, auf denen eine vollkommen freie Bewegung der Elektrizität angenommen wird, und daß wir ebenfalls unter Nichtleitern solche verstehen, auf denen absolut keine Bewegung der Elektrizität möglich ist.

Die Abstoßung und die Anziehung gleicher bzw. entgegengesetzter Elektrizitäten beobachten wir an der Bewegung oder an der Bewegungstendenz derjenigen Körper, die elektrisch geladen sind. Sind die elektrisch geladenen Körper Isolatoren, so treten infolge der Wechselwirkung ihrer Ladungen gewisse elastische Spannungszustände auf, die unter Umständen Deformationen der Körper zur Folge haben können. Sind die elektrisch geladenen Körper Leiter, so kann sich nach unserer Annahme die Elektrizität auf denselben ungehindert bewegen, und zwar wird sich die Elektrizität auf denselben so weit bewegen, bis die entgegengesetzten Ladungen einander möglichst nahe, die gleichartigen Ladungen möglichst weit voneinander entfernt sind. Sind die elektrisch geladenen Körper in einem Isolator eingeschlossen, wie z. B. eine an einem Seidenfaden in der Luft hängende Kugel, so wird der Bewegung der Elektrizität durch den Isolator eine Grenze gesetzt sein, und an dieser Grenze treten nun die vorhin erwähnten elastischen Spannungszustände auf. Die Folge davon ist, daß die Körper selbst durch ihre elektrische Ladung der Anziehung der Elektrizität zu folgen bestrebt sind. Daher bewegen sich die geladenen Körper infolge der Ladungen so, als ob sie selbst Elektrizität wären, mit dem großen Unterschiede aber, daß sie als massetragende Körper noch denjenigen Kräften unterworfen sind, denen alle Massen unterworfen sind, also z. B. der Schwere.

So ist es möglich, die Wirkung der Elektrizität zu untersuchen an den in einem Körper auftretenden elastischen Spannungszuständen oder auch an Änderungen der Gleichgewichtslage, die ein unelektrischer Körper z. B. infolge der Schwere einnehmen würde. Dieselben Erscheinungen ermöglichen auch die Messung der elektrischen Kräfte und demnach die Bestimmung des Begriffs der Elektrizitätsmenge.

§ 34. Das Coulombsche Gesetz.

Die Gesetze, nach denen die elektrischen Anziehungen und Abstoßungen erfolgen, sind zuerst 1785 von Coulomb mittels seiner sogenannten Drehwage untersucht worden. Figur 26 gibt eine schematisch gehaltene Zeichnung der Coulombschen Drehwage. Dieselbe besteht in ihrer einfachsten Form aus einem Glaszylinder *G* von ungefähr 30 cm Höhe und 30 cm Durchmesser, welcher oben durch einen Deckel verschlossen ist. In der Mitte des Deckels erhebt sich, in einer Fassung befestigt, eine Glasröhre, die am oberen Ende einen Torsionskopf *T* trägt, das ist ein mit einer Gradeinteilung versehene Metallfassung, in welche ein mit einem Rändelkopf versehenes Metallstück drehbar eingepaßt ist. An dem Metallstück ist innerhalb der Glasröhre an einer Klemme oder an einem Haken ein sehr dünner elastischer Metalldraht *D* befestigt. Der Draht reicht bis ungefähr in halbe Höhe des zylindrischen Glasgefäßes und trägt hier, in einer passenden Hülse befestigt, ein dünnes horizontales Stäbchen aus isolierendem Material. An dem einen Ende des Stäbchens ist eine kleine, leichte, leitende Kugel *A* (die Meßkugel) angebracht, an dem anderen Ende befindet sich ein kleines Glimmerblättchen zur Äquilibrierung der Kugel *A* und zur Dämpfung der Bewegungen. An dem Glasgefäße, gerade in der Höhe der Kugel *A* ist eine Gradeinteilung *E* angebracht. Endlich läßt sich durch den Deckel des Glasgefäßes noch an einem isolierenden Stäbchen die Kugel *S* (die sogenannte Standkugel) bis genau in die Höhe der Meßkugel *A* bringen.

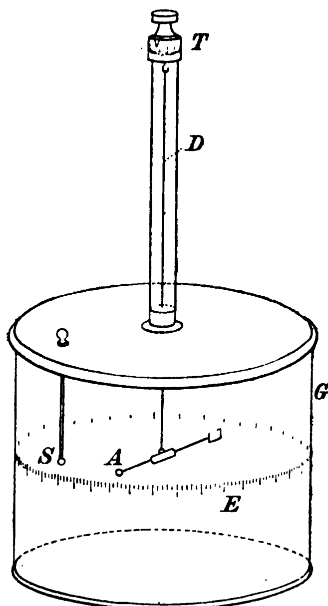


Fig. 26.

6*

Teilt man der herausgenommenen Standkugel *S* z. B. durch Berührung mit einem geriebenen Glasstabe positive Elektrizität mit und setzt sie dann wieder in den Deckel des Glasgefäßes ein, so zieht sie die Meßkugel *A* an. Diese lädt sich bei der Berührung mit *S* ebenfalls positiv elektrisch und wird von *S* abgestoßen. Das durch die Abstoßung hervorgerufene Drehungsmoment hat eine Drehung des Drahtes *D* zur Folge. Hat man nun vorher das Torsionsmoment des Drahtes *D* bestimmt, so ist die Größe der abstoßenden Kraft unmittelbar meßbar. Aus den Angaben der Teilung *E* und der bekannten Länge des horizontalen Stäbchens läßt sich die Entfernung der beiden Kugeln *S* und *A* bestimmen. Durch Drehen am Torsionskopf *D* kann man diese Entfernung beliebig verändern und so mit derselben Ladung der beiden Kugeln die Abhängigkeit der abstoßenden Kraft von der Entfernung der Kugeln untersuchen.

Durch Berühren der herausgenommenen geladenen Kugel *S* mit einer gleich großen, ebenfalls isolierten, aber unelektrischen Kugel kann man die Ladung von *S* halbieren, ebenso kann man die Ladung von *A* durch Berührung mit einer anderen gleich großen isolierten aber unelektrischen Kugel halbieren und so aufs neue die Abstoßungskraft der veränderten Ladungen untersuchen.

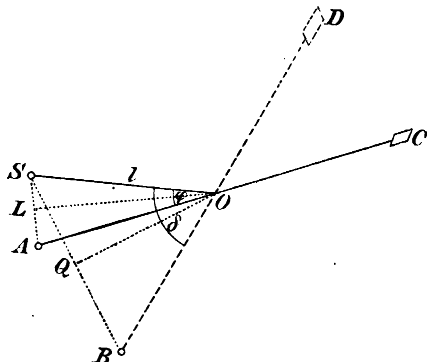


Fig. 27.

Es stelle Figur 27 den Grundriß des drehbaren Armes und der Standkugel in zwei verschiedenen Lagen dar, und zwar sei *S* die Standkugel, *O* die Achse des drehbaren

Armes, welcher in der Lage AC mit der durch die Achse und die Standkugel gehenden Nullinie den Winkel φ bilden möge. Ebenso sei BD eine zweite Lage des Armes, welche mit der Nullinie OS den Winkel δ bilden möge. Es sei $OA = l$. Verbinden wir S mit A und fällen wir von O auf AS das Lot OL, so folgt unmittelbar aus der Figur für die Entfernung der Meßkugel A von der Standkugel S die Größe

$$a = 2l \cdot \sin\frac{\varphi}{2}.$$

In derselben Weise ist

$$SB = a' = 2l \sin\frac{\delta}{2}. \tag{1}$$

Wir nehmen an, AC sei die Lage, welche der Arm annimmt, wenn beide Kugeln ungeladen sind, und BD die Lage, welche der Arm infolge der Abstoßung erfährt, so ist der Torsionswinkel, um den der Draht in der Drehwage gedreht ist, gleich $\delta - \varphi$, also in Bogenmaß gleich

$$\frac{2\pi(\delta - \varphi)}{360}.$$

Ist nun das Torsionsmoment des Drahtes für den Winkel, dessen Bogen 1 beträgt, T, so ist das für den berechneten Bogen in Frage kommende elastische Direktionsmoment

$$\frac{2\pi(\delta - \varphi)}{360} \cdot T.$$

Nennen wir die Kraft, mit welcher die Kugel S die Kugel B abstößt, K, so kommt für die Drehung des Armes nur das Moment dieser Kraft in Rechnung. Der Kraftarm von K ist aber gleich dem Lot OQ, das von O auf die Kraftrichtung SB gefällt ist. Aus der Figur ergibt sich

$$OQ = l \cdot \cos\frac{\delta}{2},$$

also ist das Drehungsmoment der elektrischen Abstoßungskraft

$$K \cdot OQ = K \cdot l \cdot \cos\frac{\delta}{2}.$$

Dieses Drehungsmoment setzen wir dem oben berechneten Direktionsmoment gleich und erhalten

$$K \cdot l \cdot \cos\frac{\delta}{2} = \frac{2\pi(\delta-\varphi)}{360} \cdot T,$$

also

(2) $$K = \frac{2\pi}{360} \cdot \frac{(\delta-\varphi)\cdot T}{l\cos\frac{\delta}{2}}.$$

Unter der Annahme nun, daß die elektrische Abstoßungskraft eine Kraft ist, die dem Quadrate der Entfernung der abstoßenden Kugeln umgekehrt proportional ist, können wir setzen

$$K = \frac{P}{SB^2},$$

wo P noch eine näher zu bestimmende, von SB aber unabhängige Funktion ist. Setzen wir den berechneten Wert von SB (Gleichung 1) ein, so erhalten wir

(3) $$K = \frac{P}{\left(2l\cdot\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}.$$

Diesen Wert setzen wir gleich dem oben berechneten Wert von K aus Gleichung (2) und erhalten

$$\frac{P}{\left(2l\sin\frac{\delta}{2}\right)^2} = \frac{2\pi}{360^0} \cdot \frac{(\delta-\varphi)T}{l\cos\frac{\delta}{2}}.$$

Vereinfacht heißt diese Gleichung

(4) $$\sin\frac{\delta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}(\delta-\varphi) = \frac{1}{l}\cdot\frac{P}{T}\cdot\frac{45^0}{\pi}.$$

Diese Gleichung ist eine Folge der Annahme, daß die Kraft dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Wenn der Versuch die Gültigkeit dieser Gleichung bestätigt, so ist damit in gewisser Weise auch die Richtigkeit der Annahme bestätigt.

Wenn nun bei den Coulombschen Versuchen die Ladungen der beiden Kugeln unverändert blieben, so blieb auch die Funktion P unverändert. Desgleichen änderte sich das Torsionsmoment des Drahtes nicht, da der Draht nicht über seine Elastizitätsgrenze hinaus beansprucht wurde. Folglich enthält die Gleichung (4) auf der rechten Seite nur konstante Glieder. Es muß also auch der Ausdruck auf der linken Seite konstant bleiben. Ist dieses der Fall, so ist die angenommene Gesetzmäßigkeit, daß die Abstoßungskraft der beiden Kugeln dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, durch den Versuch bewiesen.

Bei den Coulombschen Versuchen wurde nun nach der Abstoßung der Kugeln der Torsionskopf T entgegengesetzt der Abstoßung zurückgedreht, so daß demnach die Anfangslage des drehbaren Armes in entgegengesetzter Richtung, wie in der Figur gezeichnet, und wie auch der Berechnung zugrunde gelegt, zu rechnen ist. Nehmen wir hierauf Rücksicht, so ist in unserer Formel (4) statt φ der Wert $-\varphi$ zu setzen, und es lautet unsere Gleichung

$$\sin\frac{\delta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}(\delta+\varphi)=\text{Konst.} \tag{5}$$

Setzen wir endlich in diese Formel die von Coulomb beobachteten Werte ein, welche aus folgender Tabelle zu entnehmen sind

	I	II	III
δ	36°	18°	8° 30′
φ	0°	126°	567°
$\delta+\varphi$	36°	144°	575° 30′

so ergeben sich die folgenden drei Werte für $\sin\frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}(\delta+\varphi)$

I 3,614,
II 3,567,
III 3,163.

Nimmt man aber statt der von Coulomb beobachteten Werte die berechneten Werte aus folgender Tabelle

	I	II	III
δ'	36^0	$18^0 6'$	$9^0 4'$
φ'	0	126^0	567^0
$\delta' + \varphi'$	36^0	$144{,}10^0$	$567{,}06^0$

so erhält man in derselben Weise

I′	3,614,
II′	3,610,
III′	3,610.

Die in der zweiten Tabelle enthaltenen Werte entsprechen also unserer Bedingung der Gleichung (4) vollständig.

Vergleichen wir endlich die beobachteten Werte des Winkels δ mit den aus der letzten Tabelle zu entnehmenden Werten für δ'

beobachtet δ	36^0	18^0	$8^0 30'$
berechnet δ'	36^0	$18^0 6'$	$9^0\ 4'$

so überzeugen wir uns, daß die Coulombschen Versuche mit einem den Versuchen entsprechenden hinreichenden Werte der Genauigkeit die Richtigkeit der Annahme, daß die abstoßende Kraft zweier elektrischen Ladungen dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind, beweisen.

Die Coulombschen Versuche sind oft wiederholt. Es möge noch der Beobachtungen von Rieß gedacht werden, bei welchen der Einfachheit halber gleich die beobachteten und die berechneten Werte in eine Tabelle zusammengeschrieben sind.

	I	II	III
δ beobachtet	42^0	28^0	23^0
δ' berechnet	42^0	$27^0 44'$	$23^0 42'$
φ	0^0	70^0	110^0

Diese Übereinstimmung zeigt noch besser die Berechtigung dafür, daß das Gesetz, nach welchem die Kräfte dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind, mit der wirklichen Beobachtung übereinstimmt.

Es ist schon im Anfange dieses Paragraphen angedeutet, in welcher Weise man meßbar die Ladungen der beiden Kugeln verändern kann. Führt man dieses aus und beobachtet in derselben Weise, wie oben ausführlich angegeben, die Ablenkung der Drehwage, so ergeben die Versuche, daß die abstoßende Kraft zweier elektrischen Ladungen dem Produkte dieser Ladungen proportional ist. Eine ausführliche Durchrechnung der von Coulomb beobachteten Werte würde im wesentlichen eine Wiederholung der vorhin durchgeführten Rechnung mit anderen Werten sein und kann daher füglich unterbleiben.

Faßt man nun noch die von Coulomb beobachteten Gesetzmäßigkeiten in einem kurzen Ausdruck zusammen, so kann man schreiben

$$K = f \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

wo e_1 und e_2 die elektrischen Ladungen, r die Entfernung der geladenen Kugeln und f eine noch näher zu bestimmende Konstante ist.

In Worten ausgedrückt heißt das Coulombsche Gesetz: „Zwei $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{entgegengesetzt}\end{matrix}\right\}$ elektrisch geladene Körper (deren Dimensionen im Vergleich zu ihrer Entfernung vernachlässigt werden können) $\left\{\begin{matrix}\text{stoßen einander ab}\\ \text{ziehen einander an}\end{matrix}\right\}$ mit einer Kraft, welche dem Produkte der Ladungen direkt, dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist“

§ 35. Das Pendel-Elektrometer.

Der Nachweis des Coulombschen Gesetzes mit Hilfe der Drehwage ist äußerst subtil und daher besonders wenig zur Demonstration geeignet.

Mit Hilfe der folgenden Anordnung gelingt die Bestätigung, besonders wenn es sich nur um Demonstrationen

handelt, weit leichter. Figur 28 zeigt das Prinzip der Anordnung: An einer an der Decke des Zimmers angebrachten Leiste L befinden sich zwei Haken HH, an welche zwei äußerst leichte Kokonfäden von ca. 2 m Länge angeknüpft

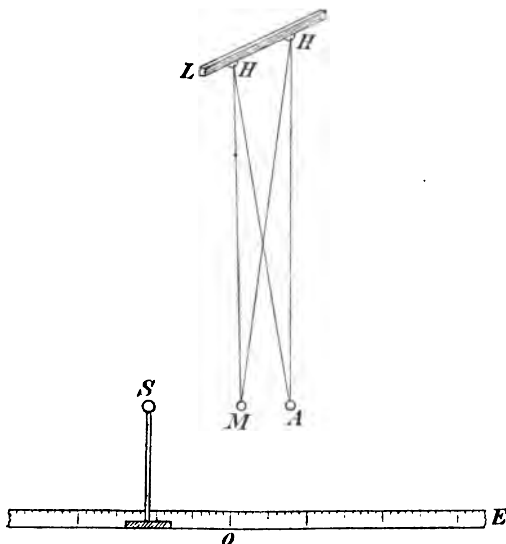


Fig. 28.

sind. Die Fäden tragen an ihrem zusammengeknüpften unteren Ende eine sehr leichte leitende Kugel M aus Sonnenblumenmark. Um die Oberfläche möglichst gut leitend zu machen, kann man sie mit Terpentinlack ganz dünn bestreichen und dann, wenn der Lack fast trocken ist, mit dünnem Goldschaum überziehen, ähnlich wie man Weihnachtsnüsse vergoldet. Ist die Leiste L rechtwinklig zur Achse des Experimentiertisches angebracht, so vermag das Kügelchen nur noch Schwingungen in der Längsachse des Tisches auszuführen. Das Kügelchen möge ungefähr noch 1 m oberhalb des Experimentiertisches frei schweben.

Auf einem isolierenden Stativ aus Hartgummi ist ferner eine leitende Standkugel S angebracht, deren Stativfuß längs einer auf dem Tische angebrachten (mit Teilung versehenen) Anschlagleiste verschoben werden kann. Der Nullpunkt O

der Anschlagleiste befindet sich dort, wo der Stativfuß der Standkugel stehen muß, damit die Standkugel genau an der Stelle der frei herabhängenden Meßkugel M sich befindet. Es sei die Standkugel S genau so groß wie die Meßkugel M. Teilt man nun der Standkugel eine gewisse elektrische Ladung mit, während man die Meßkugel M mittels eines Hartgummistäbchens zur Seite hält, so wird sie beim Loslassen der Meßkugel von der Standkugel angezogen. Diese teilt ihr die Hälfte ihrer Ladung mit und nun wird die Meßkugel abgestoßen. Man kann dann die Standkugel längs der Teilung beliebig verschieben, also den Abstand der beiden Kugeln verändern. Es möge in der Figur eine bestimmte Stelle der Standkugel durch S dargestellt sein, und es möge A dann die abgestoßene Meßkugel darstellen. Die Entfernung, die zur Bestätigung des Coulombschen Gesetzes in Rechnung zu setzen ist, ist die Strecke SA, während MA die Ablenkung darstellt. Den Ort der Kugel A, also auch die Größe der Ablenkung MA kann man dadurch bestimmen, daß man längs eines vertikal aufgehängten Lotes nach A visiert und nun beobachtet, über welchem Punkte der Teilung sich die Visierlinie des Lotes befindet.

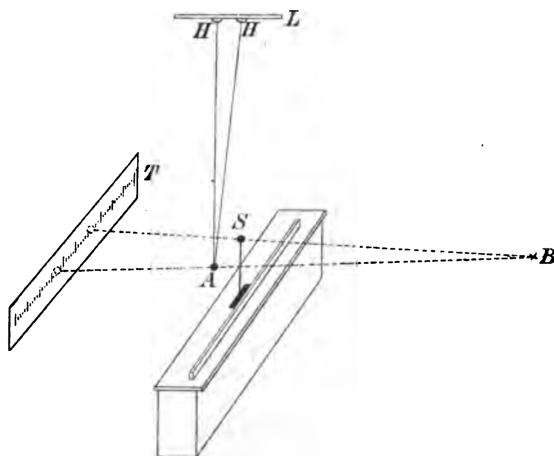


Fig. 29.

Die Ablesung ist jedoch wesentlich bequemer, wenn man senkrecht zur Achse des Experimentiertisches in etwa

8 m Entfernung eine punktförmige Lichtquelle, z. B. eine freie elektrische Bogenlampe *B* (Fig. 29) aufhängt und nun die Schattenbilder *S'* und *A'*, welche die Kugeln *S* und *A* auf einer auf der anderen Seite des Experimentiertisches aufgehängten Meterteilung *T* bilden, zur Ablesung benutzt.

Zur Berechnung der Kraft der Abstoßung *K* aus der Größe der Ablenkung δ, welche die Meßkugel erfährt, betrachte man Figur 30. Hier bedeutet *HM* die Ruhelage des Pendels und *HA* die abgelenkte Lage desselben. Auf die Pendelkugel *A* wirken in dieser abgelenkten Lage zwei Kräfte, nämlich erstens das vertikal nach abwärts gerichtete Gewicht *G* der Pendelkugel und zweitens die horizontal gerichtete Abstoßungskraft *K*. Da sich die Pendelkugel infolge der Aufhängung nur auf dem Kreisbogen *MA* mit dem Radius $HM = l$ bewegen kann, so kommen für die Berechnung der Lage *A* nur die Projektionen der Kräfte *G* und *K* auf die augenblickliche Bahn, nämlich auf die Tangente *CC* im Punkte *A* an die Kreisbahn in Frage. Die Gleichheit der mit α bezeichneten Winkel ist aus der Figur ersichtlich. Die Projektionen von *G* und *K* auf die Bahn sind $G \cdot \sin\alpha$ und $K \cdot \cos\alpha$. Es herrscht also Gleichgewicht, wenn

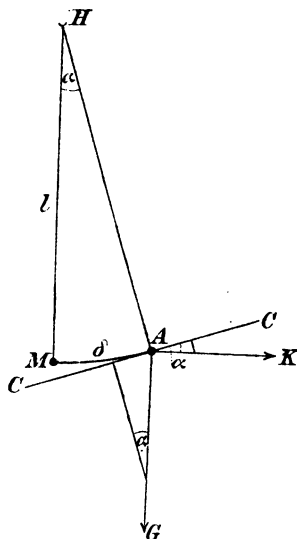


Fig. 30.

$$K \cdot \cos\alpha = G \cdot \sin\alpha$$

ist, d. h., wenn

$$K = G \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

ist. Wählen wir die Ablenkung der Pendelkugel so klein, daß wir statt des Tangens den Bogen selbst nehmen können, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{arc}\alpha = \frac{\delta}{l},$$

woraus dann folgt

$$K = G \cdot \frac{\delta}{l}.$$

Es ist also die ablenkende Kraft K dem Gewicht der Pendelkugel G und der Ablenkung δ direkt, dagegen der Pendellänge l umgekehrt proportional. Daraus ergibt sich zugleich, daß es ratsam ist, um einen möglichst großen Ausschlag zu bekommen, also um den Apparat möglichst empfindlich zu machen, daß man die Pendelkugel möglichst leicht und die Länge des Pendels möglichst groß wählt.

Auf Grund der Ablenkung kann man also die Größe der ablenkenden Kraft direkt berechnen und auch die ablenkende Kraft bei verschiedenen Entfernungen der beiden ablenkenden Kugeln miteinander vergleichen.

Ferner kann man die Größe der Ladungen von S und M durch Berührung mit gleich großen isolierten Kugeln beliebig auf die Hälfte, auf ein Viertel usw. verringern, also auch nun die ablenkende Kraft berechnen.

Die mittels des Pendel-Elektrometers gemachten Beobachtungen ergeben eine vollkommene Bestätigung des Coulombschen Gesetzes

$$K = f \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

§ 36. Bestätigung des Coulombschen Gesetzes aus der Tatsache, daß das Innere eines Leiters frei von elektrischer Ladung ist.

Schon Cavendish machte die Beobachtung, daß das Innere eines Leiters frei von jeglicher elektrischer Ladung ist. Diese Versuche sind mit der größten Mannigfaltigkeit durch Faraday wiederholt. Faraday stellte einen aus Drahtnetz gebauten Hohlkörper her, der noch dazu mit Stanniol allseitig überzogen war, und der so groß war, daß er selbst darin Platz finden konnte. Der Käfig wurde allseitig isoliert aufgestellt. Wenn er selbst sich nun mit den empfindlichsten Elektroskopen in das Innere des Käfigs begab, zeigten die Apparate keine Spur von Elektrizität an, wenn der Käfig auch so stark elektrisch geladen wurde, daß kräftige Funken-

und starke Büschelentladungen außen aus den Ecken und Kanten herauskamen.

Führte er eine geladene Kugel in das Innere eines leitenden Hohlkörpers, und berührte er dann den Hohlkörper von innen, so ging sofort die gesamte Ladung auf die Außenwandungen des Hohlkörpers über. Die Kugel selbst wurde vollkommen frei von Elektrizität aus dem Hohlraum herausgezogen.

Ähnliche Versuche sind in ungezählter Menge und mit den mannigfaltigsten Veränderungen oft wiederholt und haben auf das sicherste bewiesen, daß bei einem allseitig geschlossenen leitenden Körper alle elektrische Ladung auf der Oberfläche des Leiters sich ansammelt, daß das Innere vollkommen unelektrisch bleibt, und daß auch die äußere Ladung absolut ohne Kraftwirkung für das Innere ist.

Wählen wir als Hohlkörper eine Hohlkugel, so breitet sich die elektrische Ladung vollkommen gleichmäßig auf der Oberfläche aus. Wir haben also den Fall einer homogen belegten Kugelschale von unendlich kleiner Dicke vor uns.

In § 10 haben wir nun nachgewiesen, daß für jedes Agens, das nach dem Gesetze

$$K = f \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

wirkt, und das eine Kugelschale gleichmäßig belegt, das Innere frei von irgend welcher Kraftwirkung ist. Wir können nun den Schluß umkehren und behaupten, daß in der Tatsache, daß das Innere eines elektrisch geladenen kugelförmigen Leiters frei von Kraftwirkung ist, eine Bestätigung des Coulombschen Gesetzes vorliegt. Und zwar ist diese Bestätigung die einfachste und die zuverlässigste.

§ 37. Die elektrostatische Einheit.

Bei Bestimmung der Masseneinheit aus dem Gravitationsgesetze waren wir in der üblen Lage, daß wir entweder neben der trägen Masseneinheit noch eine gravitierende Masseneinheit wählen mußten, wenn wir das Gravitationsgesetz von dem Faktor f befreien wollten, oder daß wir für die gravitierende Masse dieselbe Einheit wählen mußten, die für die

träge Masse schon früher bestimmt war. Letzteres zogen wir vor und mußten nun die Gravitationskonstante f besonders bestimmen.

Bei der Elektrizität liegt diese Beschränkung nicht vor. Wir können über die Einheit der Elektrizitätsmenge noch vollkommen frei verfügen. Aus diesem Grunde wählen wir dieselbe so, daß in dem Coulombschen Gesetze

$$K = f \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

die Konstante f gleich der Zahleneinheit wird.

Allerdings ist zu bemerken, daß wir zwei Arten der Elektrizität haben, die wir als positiv und negativ bezeichnen. Gleichartige Elektrizitäten üben eine Abstoßung, entgegengesetzte eine Anziehung aufeinander aus. Bezeichnen wir die Art der Elektrizität durch ein davor gesetztes Vorzeichen, so ergibt sich, wenn beide elektrische Ladungen positiv oder beide negativ sind, daß das Produkt $e_1 e_2$, also auch der Ausdruck $\frac{e_1 e_2}{r^2}$ positiv wird; daß dagegen dann, wenn die eine Ladung positiv, die andere negativ ist, das Produkt ein negatives Vorzeichen bekommt.

Wählen wir für f den Wert der positiven Zahleneinheit, so entsteht für den Ausdruck für K bei abstoßenden Kräften ein positiver, bei anziehenden Kräften ein negativer Wert. Wir können also aus dem Vorzeichen von K darauf schließen, ob die elektrischen Ladungen eine Entfernung oder eine Annäherung der geladenen Körper zur Folge haben werden.

Für die Krafteinheit haben wir früher schon (§ 15) ein Dyn, für die Masseneinheit ein Gramm, für die Längeneinheit ein Zentimeter gewählt. Wir wählen also, um den Faktor f im Coulombschen Gesetze zu unterdrücken, die elektrostatische Einheit nach folgender Definition: „Die Elektrizitätsmenge „eins" ist diejenige, welche auf eine ihr gleiche im Abstande von 1 cm befindliche, eine abstoßende Kraft von einem Dyn ausübt."

Auf Grund dieser Definition nimmt das Coulombsche Gesetz die einfache Gestalt an

$$K = \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

Zur Veranschaulichung der Einheit der Elektrizitätsmenge wählen wir eine Kugel aus Sonnenblumenmark von 10 mg Gewicht. Dieselbe hat ungefähr einen Durchmesser von 8 mm. Diese Kugel benutzen wir als Meßkugel M unseres Pendel-Elektrometers. Wir hängen sie an Fäden von 1 m Länge. Ferner stellen wir uns eine genau so große Kugel als Standkugel S her. Wir laden die Standkugel durch Berühren mit einer geriebenen Glasstange und beobachten, daß die Meßkugel abgestoßen wird. Wir nähern ihr die Standkugel und beobachten, daß wir die Meßkugel um 10,2 cm aus ihrer Nullage entfernen müssen, ehe wir die Standkugel so weit genähert haben, daß die Mittelpunkte der Kugeln nur noch einen Abstand von 1 cm haben.

Da nach unserer oben entwickelten Formel

$$K = G \cdot \frac{\delta}{l}$$

ist, und da hier $G = 10$ mg $= 9{,}81$ dyn, $\delta = 10{,}2$ cm und $l = 100$ cm ist, so folgt

$$K = \frac{9{,}81 \cdot 10{,}2}{100} = 1 \text{ dyn}.$$

Ferner haben die Kugeln den Abstand von 1 cm, sie wirken in diesem Abstande aufeinander mit einer Kraft von 1 dyn, also haben sie eine Ladung von 1 elektrostatischen Einheit (1 E. S. E.).

§ 38. Das elektrostatische Kraftfeld eines elektrisch geladenen punktförmigen Körpers.

Wir wollen uns einen anschaulichen Begriff machen von dem Kraftfelde, das die positive elektrostatische Einheit umgibt.

Für die Bestimmung der Niveauflächen kommt der Begriff des Potentials, das wir früher in der Form

$$V = f \cdot \frac{m}{r}$$

abgeleitet haben, zur Anwendung. Unter Benutzung der im vorigen Paragraphen definierten elektrostatischen Einheit fällt

der Faktor f fort, so daß wir in Zukunft nur zu schreiben brauchen

$$V = \frac{m}{r}. \tag{1}$$

In dem von der positiven elektrostatischen Einheit hervorgerufenen Kraftfelde wird noch $m = 1$, so daß das Potential hier die einfachste Form

$$V = \frac{1}{r}$$

bekommt.

Die Niveaufläche „eins", d. h. die Niveaufläche, auf der das Potential „ein Erg" herrscht, ist eine Kugel, die um die elektrostatische Einheit mit dem Radius von 1 cm konstruiert ist. Das Potential „zwei Erg" herrscht auf einer Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}$ cm, ebenso 3 Erg auf einer Kugel mit dem Radius $\frac{1}{3}$ cm, allgemein n Erg auf einer Kugel mit dem Radius $\frac{1}{n}$ cm.

In Figur 31 sind die Kugeln, die den Potentialwerten 1 bis 6 Erg entsprechen, durch Kreise in natürlicher Größe dargestellt. Man erkennt hieraus, daß die Abstände der Niveauflächen voneinander nach dem Mittelpunkte zu immer kleiner und kleiner werden.

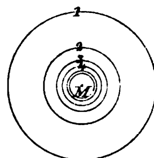


Fig. 31.

Die Kraftlinien schneiden die Niveauflächen unter rechten Winkeln, also bilden sie Radien der Kugeln. Wollen wir durch die Kraftlinienzahl auch die Größe der Kraft ausdrücken, so wissen wir, daß in unserem von der elektrostatischen Einheit ausgehenden Felde im Abstande von 1 cm vom Mittelpunkte eine andere elektrostatische Einheit mit der Kraft von 1 Dyn abgestoßen wird. Daher herrscht auf der Kugel mit dem Radius 1 cm die Feldstärke „eins". Wir haben früher die Kraftlinienzahl so bestimmt, daß bei der Feldstärke „eins" durch ein Quadratzentimeter eine Kraftlinie gehen soll, folglich müssen durch die Kugeloberfläche vom Radius 1 cm so viel Kraftlinien

gehen, wie die Kugeloberfläche Quadratzentimeter enthält. Die Oberfläche einer Kugel hat den Flächeninhalt

$$Q = 4\pi r^2$$

und da hier $r = 1$ cm sein soll, folgt

$$Q_1 = 4\pi .$$

Daher gehen durch die Kugeloberfläche vom Radius 1 cm 4π Kraftlinien. Jede einzelne Kraftlinie, die durch eine der Niveauflächen geht, geht auch durch die nächste, also auch durch alle, folglich werden alle Kugeloberflächen von 4π Kraftlinien geschnitten. Wir können auch sagen: Die elektrostatische Einheit ist der Ausgangspunkt (der Quellpunkt) von 4π Kraftlinien.

Wir können das auch so ausdrücken, daß wir sagen, durch eine die elektrostatische Einheit konzentrisch umgebende Kugelfläche geht der Kraftfluß 4π. Konstruieren wir um die elektrostatische Einheit irgend eine andere Fläche, welche die elektrostatische Einheit vollkommen umschließt, so muß auch durch diese der Kraftfluß gleich 4π sein.

Hätten wir statt der positiven Einheit der Elektrizitätsmenge die negative Einheit als Erregungspunkt des Feldes genommen, so wäre das Bild der Niveauflächen genau dasselbe gewesen, wie Figur 31, aber die Potentialwerte wären alle negativ gewesen und die Kraftlinien wären nicht von innen nach außen, wie vorhin, sondern von außen nach innen gegangen, da die zur Untersuchung des Feldes dienende positive Einheit der Elektrizitätsmenge sich nach dem Erregungszentrum hin bewegt hätte. Die Kraftlinien wären gewissermaßen von außen in die Niveaufläche eingetreten und wären im Erregungszentrum verschwunden. In diesem Sinne nennt man auch wohl einen solchen Punkt eine Sinkstelle des Kraftfeldes. Die negative elektrostatische Einheit ist eine Sinkstelle für 4π Kraftlinien.

Hätten wir endlich im Erregungszentrum statt der Einheit der Elektrizitätsmenge die Elektrizitätsmenge e gehabt, so wären die Potentialwerte durch den Ausdruck

$$V = \frac{e}{r}$$

bestimmt. Das der Figur 31 entsprechende Bild dieses Kraftfeldes hätte sich dadurch unterschieden, daß die Niveaufläche

„ein erg" im Abstande von e Zentimetern entstanden wäre. Es hätten die in Figur 31 gezeichneten Niveauflächen die Potentialwerte e, $2e$, $3e$, ... $6e$ gehabt.

Da die Feldstärke „eins" erst dort geherrscht hätte, wo die Kraft $\frac{e \cdot 1}{r^2}$ den Wert „eins" bekommt, also wo $r = \sqrt{e}$ ist, so folgt, daß durch die Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{e}$ so viele Kraftlinien hindurchgehen, wie dieselbe Quadratzentimeter Oberfläche hat. Die Oberfläche dieser Kugel beträgt $Q = 4\pi r^2 = 4\pi e$, also gehen durch diese Kugel $4\pi e$ Kraftlinien. Die Elektrizitätsmenge e ist der Quellpunkt von $4\pi e$ Kraftlinien.

Man kann die Sache auch so auffassen, daß man sagt: Da jede elektrostatische Einheit der Quellpunkt von 4π Kraftlinien ist, so muß von der Elektrizitätsmenge e die $e$fache Zahl ausgehen. Diese Überlegung deckt sich mit unseren Begriffen von der Summation mehrerer Felder, die in diesem Falle von demselben Punkte ausgehen. Umschließt man die Elektrizitätsmenge e mit irgend einer anderen geschlossenen Fläche, so muß auch durch diese hindurch der Kraftfluß gleich $4\pi e$ sein.

§ 39. Kraftfluß durch eine beliebige Fläche.

Wenn man (Fig. 32) von einem Punkte P aus nach allen Punkten einer geschlossenen Kurve Q Strahlen zieht,

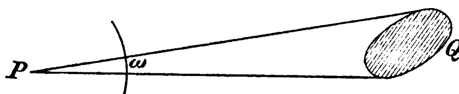


Fig. 32.

so begrenzen diese Strahlen einen konischen Raum. Die Strahlen schneiden aus einer mit dem Mittelpunkte P konstruierten Kugel ein bestimmtes Flächenstück heraus, dessen Größe einerseits von der Größe des von der Kurve Q umgrenzten Flächenstückes, andererseits von dem Radius der Kugel abhängt. Wählen wir den Radius dieser Kugel gleich der Längeneinheit, so hängt die Größe des Teils der Kugelfläche innerhalb des Strahlenkegels nur noch von der

Größe und Lage von Q und von der Lage von P ab. Diesen auf der Einheitskugel ausgeschnittenen Teil der Kugeloberfläche nennt man den „räumlichen Winkel".

Der räumliche Winkel ist demnach eine Flächengröße. Um die Abhängigkeit desselben von seiner Lage zu P zum Ausdruck zu bringen, benutzen wir Figur 33. Die Fläche

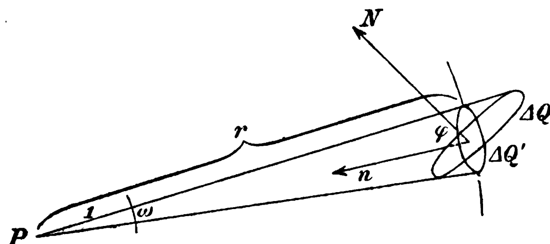


Fig. 33.

ΔQ wird von dem von P aus konstruierten Strahlenkegel umschlossen. Der Abstand von P nach ΔQ, das wir so klein wählen, daß wir alle Abstände als gleich betrachten können, sei gleich r. Wir konstruieren um P eine Kugel mit dem Radius „eins" und eine Kugel mit dem Radius r. Aus der Kugel mit dem Radius „eins" wird das Flächenstück ω, d. i. der räumliche Winkel ausgeschnitten. Aus der Kugel mit dem Radius r schneidet der Strahlenkegel die Fläche $\Delta Q'$ aus. Errichten wir ferner noch auf ΔQ die Normale N, so bildet diese Normale mit r denselben Winkel φ, den auch ΔQ mit $\Delta Q'$ einschließt, folglich ist $\Delta Q' = \Delta Q \cdot \cos\varphi$. Beachten wir noch, daß $\Delta Q' : \omega = r^2 : 1$ ist, so ergibt sich $\omega = \frac{\Delta Q'}{r^2}$, also endlich

$$\omega = \frac{\Delta Q \cdot \cos\varphi}{r^2}. \tag{1}$$

Würde die von der Kurve umschlossene Fläche sich weiter ausdehnen, und würde sie also den Punkt P immer mehr und mehr umschließen, so würde der räumliche Winkel einen immer größeren Teil der Oberfläche der Einheitskugel bilden. Denken wir uns endlich das Flächenstück so erweitert, daß es den Punkt P vollständig umschließt, so wird

der räumliche Winkel gleich der Gesamtoberfläche 4π der Einheitskugel. Hieraus folgt, daß der räumliche Winkel einer geschlossenen Fläche für einen im Innenraum der geschlossenen Fläche liegenden Punkt gleich 4π ist.

Ist der Punkt P gleichzeitig ein mit der Elektrizitätsmenge e geladener Körper, so wissen wir, daß von ihm aus $4\pi e$ Kraftlinien ausgehen. Der durch die geschlossene Fläche hindurchgehende Kraftfluß ist also auch gleich dem räumlichen Winkel, multipliziert mit der im Innern der Fläche liegenden punktförmigen Elektrizitätsmenge. Diese Tatsache gewinnt dadurch noch eine besondere Bedeutung, daß sie einer allgemeineren Anwendung fähig ist.

Wir wollen zu dem Zwecke noch den Begriff des „normalen Kraftflusses" einführen. Dieser Begriff soll definiert sein durch das Produkt aus der Größe der Oberfläche und der Größe der in normaler Richtung auf diese Fläche gerichteten Kraftkomponente der Feldstärke. Wenn in Figur 34 ΔQ eine kleine Fläche innerhalb eines Kraftfeldes sein soll, dessen Kraftrichtung durch die kleinen Pfeile angegeben ist, wenn ferner die in der Richtung der Kraftlinien gemessene Feldstärke gleich K ist, und wenn endlich die Normale N auf dieser Fläche mit der Kraftrichtung K den Winkel φ einschließt, so ist die in der Richtung N wirkende Kraftkomponente gleich $K \cdot \cos\varphi$ (nach § 1), folglich ist der normale Kraftfluß durch die Fläche ΔQ gleich

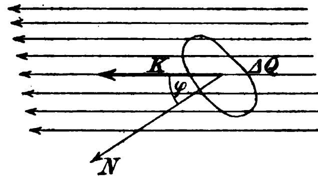


Fig. 34.

$$f = \Delta Q \cdot K \cdot \cos\varphi . \tag{2}$$

Diesem Ausdruck können wir noch die Form geben

$$f = \frac{\partial V}{\partial N} \cdot \Delta Q , \tag{3}$$

denn die in der Richtung der Normale wirkende Kraftkomponente ist gleich dem ersten Differentialquotienten des Potentials nach dieser Richtung.

Unter Benutzung der Gleichung (2) betrachten wir endlich wieder den Fall, daß die Kraft K herrührt von der

elektrischen Ladung e des Punktes P, der von ΔQ die Entfernung r hat. Dann ist die Feldstärke K an der Stelle ΔQ

$$K = \frac{e}{r^2},$$

so daß der Ausdruck f die Form annimmt

$$f = \frac{e \cdot \Delta Q \cdot \cos\varphi}{r^2}. \tag{4}$$

Nach Gleichung (1) ist aber $\frac{\Delta Q \cos\varphi}{r^2} = \omega$, also folgt

$$f = e \cdot \omega. \tag{5}$$

Der normale Kraftfluß durch eine kleine Fläche, auf welche die elektrische Ladung e wirkt, ist demnach gleich dem Produkt aus der Stärke der Ladung und dem von der Ladung aus gesehenen räumlichen Winkel der Fläche.

Für die Berechnung des normalen Kraftflusses durch eine allseitig geschlossene Fläche kommen die beiden verschiedenen Fälle in Frage, erstens, daß der elektrisch geladene Punkt P außerhalb, zweitens, daß er innerhalb der Fläche liegt.

Es sei in Figur 35 durch die gezeichnete Kurve eine allseitig geschlossene Fläche angedeutet, außerhalb welcher der elektrisch geladene Punkt P liegt. Zur Berechnung des normalen Kraftflusses durch diese Fläche ziehen wir von P aus einen schmalen Kegel, der aus der geschlossenen Fläche entweder zwei Oberflächenstücke, wie z. B. ΔQ_5 und ΔQ_6 oder 4 Flächenstücke, wie z. B. ΔQ_1, ΔQ_2, ΔQ_3 und ΔQ_4 oder auch noch mehr Flächenstücke, jedoch immer eine gerade Anzahl ausschneidet. Betrachten wir den Kegel, der die Flächenstücke $\Delta Q_1 \ldots \Delta Q_4$ ausschneidet, so errichten wir die Normalen $N_1 \ldots N_4$ auf diesen Flächenstücken, welche mit den von P ausgehenden Strahlen die Winkel $\varphi_1 \ldots \varphi_4$ bilden, so daß der durch diese Flächenstücke gehende normale Kraftfluß aus den Teilen

$$\frac{e\,\Delta Q_1 \cos\varphi_1}{r_1^2}, \quad \frac{e\,\Delta Q_2 \cos\varphi_2}{r_2^2}, \quad \frac{e\,\Delta Q_3 \cos\varphi_3}{r_3^2}, \quad \frac{e\,\Delta Q_4 \cos\varphi_4}{r_4^2}$$

besteht. Da nach Gleichung (1)

$$\frac{\Delta Q \cdot \cos\varphi}{r^2} = \omega$$

ist, so ergibt sich also dem absoluten Zahlenwerte nach für alle diese vier Teile derselbe Wert $e\omega$. Nun ist aber zu beachten, daß der Winkel φ_1 ein stumpfer, φ_2 ein spitzer, φ_3 ein stumpfer und φ_4 wieder ein spitzer Winkel ist, wenn man jedesmal den Winkel in Rechnung

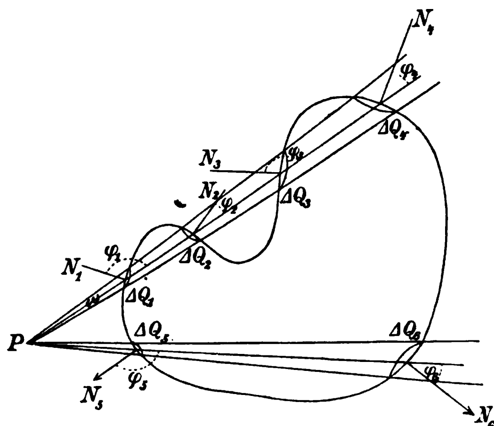


Fig. 35.

zieht, den die nach außen gerichtete Normale mit der positiven Richtung von r bildet, wobei unter positiver Richtung die Richtung der wachsenden r verstanden ist. Daraus folgt, daß das Vorzeichen der oben angegebenen vier Werte abwechselnd negativ und positiv ist. Da nun die absoluten Werte gleich sind, so folgt für den gesamten Kraftfluß durch die Flächen $\Delta Q_1 \ldots \Delta Q_4$ der Wert „Null". Ebenso folgt für den normalen Kraftfluß durch die Flächen ΔQ_5 und ΔQ_6 zusammen der Wert „Null". Dasselbe gilt für jede Flächengruppe, die von einem von P ausgehenden Strahlenkegel ausgeschnitten wird. Auch dann, wenn der Punkt P so liegt, wie in Figur 36 angegeben, daß also der von P gezogene Strahlenkegel nach beiden Seiten hin Flächenstücke aus der Fläche ausschneidet, sind die Winkel abwechselnd

spitz, wie φ_1 und φ_4 und stumpf, wie φ_2 und φ_3, so daß auch hier die Summe der Kraftflüsse durch die Flächen $\Delta Q_1 \ldots \Delta Q_4$ gleich Null ist.

Wenn wir nun durch P in Figur 35 oder Figur 36, wo P außerhalb der geschlossenen Fläche liegt, die Gesamtheit

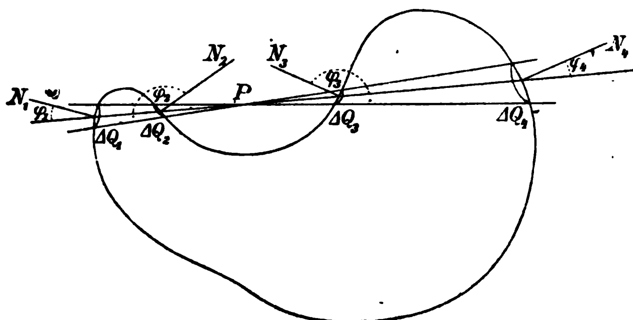


Fig. 36.

der Strahlenkegel ziehen, die alle Teile der Fläche einschließen, so ergibt sich für jeden einzelnen Strahlenkegel das Resultat Null, also ist auch die Gesamtsumme gleich Null. Daraus folgt: Der gesamte normale Kraftfluß durch eine geschlossene Fläche, soweit er außerhalb entspringt, ist gleich Null.

Für einen Punkt P im Innenraum der geschlossenen Fläche liegt die Sache wesentlich anders. Figur 37 stellt diese Verhältnisse dar. Auch hier schneidet jeder Strahlenkegel Flächenstücke ΔQ aus, für welche der hindurchgehende Kraftfluß durch $e\omega$ bestimmt ist, aber man hat zu beachten, daß hier jeder Strahlenkegel eine ungerade Anzahl von Flächenstücken, entweder nur eins, wie ΔQ_4 oder drei, wie ΔQ_1, ΔQ_2, ΔQ_3 oder fünf oder mehr, jedoch immer eine ungerade Zahl ausschneidet. Der absolute Wert jedes einzelnen Kraftflusses beträgt wieder $e\omega$, aber bei einem Flächenstück, wie ΔQ_4 ist dieser Wert wegen des spitzen Winkels φ_4 positiv, bei dreien, wie bei ΔQ_1, ΔQ_2, ΔQ_3 ist einer der Werte negativ und die beiden anderen positiv, denn φ_1 ist spitz, φ_2 ist stumpf und φ_3 ist spitz. Es heben sich bei der Summation also alle Werte

bis auf einen auf. Ziehen wir nun wieder alle von P ausgehenden Strahlenkegel, die die ganze Fläche be-

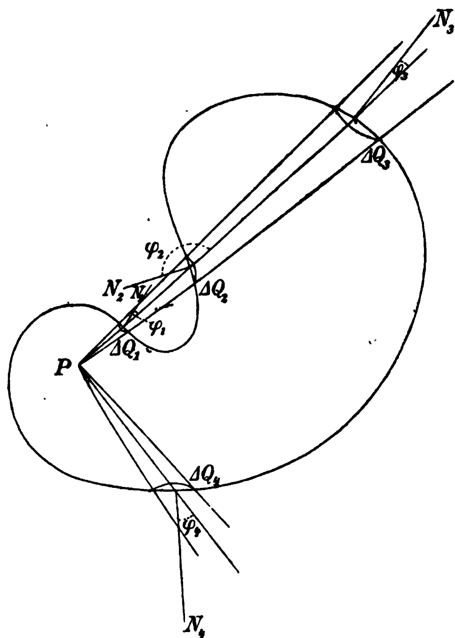


Fig. 37.

grenzen, so haben wir zur Bildung des Gesamt-Kraftflusses die Summation

$$f = \Sigma e\omega = e\Sigma\,\omega$$

auszuführen. $\Sigma\omega$ ist aber gleich 4π, da erst durch die Gesamtheit aller um einen Punkt herum gebildeten Strahlenkegel die ganze geschlossene Fläche bestrichen wird. Hieraus folgt: Der gesamte normale Kraftfluß durch eine geschlossene Fläche, innerhalb welcher die elektrische Ladung e sich befindet, ist gleich $4\pi e$.

§ 40. Das durch zwei elektrische Ladungen hervorgerufene elektrostatische Kraftfeld.

Wir haben bei der Zusammensetzung zweier Gravitationsfelder (§ 30) schon gesehen, daß das Potential in einem durch zwei Agensmengen hervorgerufenen Felde gleich der Summe der Potentiale in diesem Punkte ist, die der Punkt haben würde, wenn er sich in dem Felde jeder einzelnen Agensmenge befände. Da nun das Kraftgesetz für elektrische Mengen dasselbe ist, wie für gravitierende Massen, so gilt diese Beziehung für elektrische Mengen in derselben Weise.

Betragen also die beiden einzelnen Ladungen e_1 und e_2, und befindet sich der untersuchte Punkt in der Entfernung r_1 von e_1 und in der Entfernung r_2 von e_2, so wären die beiden Einzelpotentiale $\frac{e_1}{r_1}$ und $\frac{e_2}{r_2}$, also ist das Potential des Punktes in dem zusammengesetzten Felde

$$V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}.$$

Doch ist hierbei auf zweierlei aufmerksam zu machen. Man kann nämlich erstens keinen elektrisch geladenen Punkt darstellen. Wir wissen aber, daß bei einer leitenden Kugel sich die gesamte Ladung gleichmäßig auf der Oberfläche der Kugel verbreitet. Da eine gleichmäßig mit Agens belegte Kugelschale aber nach § 8 so wirkt, als ob die ganze Ladung im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre, so können wir statt des der Berechnung zugrunde gelegten elektrischen Punktes eine elektrisch homogen geladene Kugel verwenden, ohne daß an der Rechnung etwas geändert wird. Die Entfernungen r_1 und r_2 sind dann immer von den Mittelpunkten der Kugeln zu rechnen. Zweitens gibt es positive und negative elektrische Ladungen. Geben wir in der Gleichung

$$V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}$$

den Größen e_1 und e_2 gleich die Vorzeichen ihrer Ladung, so gilt die Formel auch für negative und für ungleichartige Ladungen.

Wir wollen jetzt die Niveauflächen eines so zusammengesetzten Feldes bestimmen. Diese Aufgabe wollen wir einmal für zwei Ladungen desselben Vorzeichens und dann für zwei Ladungen mit entgegengesetzten Vorzeichen behandeln. Wir lehnen uns dabei an die in Figur 38 und

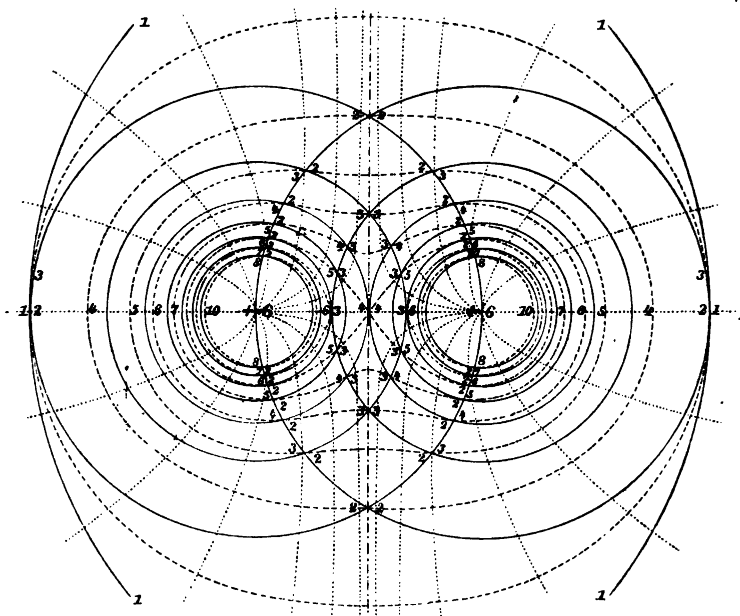


Fig. 38.

Figur 39 dargestellten Zeichnungen, welche die Durchschnittsfiguren unserer Niveauflächen mit der Papierebene darstellen.

In Figur 38 ist das elektrische Kraftfeld dargestellt für den Fall, daß zwei gleiche elektrische Ladungen, von denen jede gleich + 6 elektrostatischen Einheiten ist, sich in einer Entfernung von 3 cm voneinander befinden.

Wir konstruieren zuerst die Niveauflächen der beiden einzelnen Felder. Das ist in der Figur durch ausgezogene Kreise um die beiden Punkte ausgeführt. Die Kurven ent-

sprechen den Potentialwerten $+1$, $+2 \ldots +8$, sie sind also konstruiert mit den Radien

$$\frac{6}{1} = 6 \text{ cm}, \quad \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}, \quad \frac{6}{3} = 2 \text{ cm} \ldots, \quad \frac{6}{8} = 0{,}75 \text{ cm}.$$

Einige beigesetzte Zahlen geben die einzelnen Potentialwerte an. In den Durchschnittspunkten der so konstruierten Kreissysteme ist die Bestimmung der Potentialwerte leicht dadurch auszuführen, daß man die Einzelpotentiale addiert. So herrscht z. B. in dem Durchschnittspunkte der Kreise $+3$ des linken Systems mit $+2$ des rechten Systems der Potentialwert $+3+2=+5$. Auf diese Weise bestimmen wir die Potentialwerte aller Durchschnittspunkte. Hierdurch ergeben sich auch eine ganze Anzahl von Punkten, denen derselbe Gesamtpotentialwert zukommt. Diese Punkte von gleichem Gesamtpotential sind auch Punkte der Niveauflächen des zusammengesetzten Feldes. Unter Benutzung dieser Punkte sind die in der Figur gestrichelten Kurven, die die Durchschnittsfiguren der Niveauflächen mit der Papierebene darstellen, gezeichnet. Das fertige Bild zeigt nun, daß in der Nähe der Erregungspunkte das Bild des zusammengesetzten Feldes von dem des Erregungspunktes allein nur wenig abweicht; das hat seinen Grund darin, daß für diese Punkte der entsprechende r-Wert nur klein ist im Vergleich zum r-Werte für den anderen Erregungspunkt, daß also der zugehörige Potentialwert überaus groß ist im Vergleich zu dem Betrage, den der Potentialwert des anderen Punktes liefert.

Wenn wir dagegen die in größeren Entfernungen an den Erregungspunkten liegenden Niveauflächen betrachten, so erkennen wir, daß sie sich immer mehr der Kugelform nähern, die um den Mittelpunkt der beiden Erregungspunkte konstruiert sind. Das kommt natürlich daher, das im Vergleich zu den großen Entfernungen des untersuchten Punktes von dem Erregungspunkte selbst die beiden Erregungspunkte immer mehr als in einen zusammenfallend vorgestellt werden können.

Die punktiert gezeichneten Kraftlinien gehen von den Erregungspunkten, den Quellpunkten aus und schneiden die Niveauflächen unter rechten Winkeln. Von besonderem Interesse erscheint noch der in der Mitte zwischen den Quell-

punkten liegende Punkt. In diesem Punkte stoßen die beiden Niveauflächen von links und von rechts in einem Punkte ähnlich dem Scheitel eines Doppelkegels zusammen. Hier gibt es kein eindeutiges Lot auf der Fläche, also auch keine Kraftlinie. Die beiden Kraftliniensysteme von links und rechts scheinen förmlich vor diesem Punkte zurückzuweichen. In dem Punkte selbst findet keine Kraftwirkung statt. Eine hierhin gebrachte positive elektrostatische Einheit würde sich an dieser Stelle im stabilen Gleichgewicht befinden, wenn der die positive elektrostatische Einheitsladung tragende Körper sich nur auf der Verbindungslinie der beiden Quellpunkte bewegen könnte, da an dieser Stelle ein Minimalwert des Potentials herrscht, nämlich 8, während nach links und nach rechts die Potentialwerte größer sind.

Endlich ist noch hervorzuheben, daß alle Kraftlinien von den beiden Quellstellen ausgehen und von hier aus ins Unendliche verlaufen. Negative Potentialwerte kommen bei positiven Ladungen der Erregungstellen überhaupt nicht vor.

Ein wesentlich anderes Bild liefert uns Figur 39, einmal weil die beiden Ladungen von verschiedenen Vorzeichen, und zweitens, weil sie von verschiedener Größe sind. Die Konstruktion der Niveauflächen ist der von Figur 38 im wesentlichen gleich, nur sind die Zahlenwerte der Potentiale der einzelnen Ladungen, da sie entgegengesetztes Vorzeichen haben, voneinander zu subtrahieren. Es ist z. B. der Durchschnittspunkt der Niveaulinie $+2$ des Einzelpotentials der Ladung rechts mit der Niveaulinie -1 des Einzelpotentials der Ladung links ein Punkt der Niveaulinie $+1$ des Gesamtpotentials. Es kommen hier außer positiven Potentialwerten, die von der positiven Ladung herrühren, auch negative Potentialwerte vor. Die Niveaufläche vom Potentialwerte Null zerfällt in zwei Teile, von denen ein Teil annähernd die Form einer Kugel hat, die die Ladung -2 umgibt. Der andere Teil der Niveaufläche Null liegt im Unendlichen.

Die Kraftlinien schneiden die Niveauflächen wieder senkrecht. Aber ein Teil der Kraftlinien, die von der Ladung $+6$ ausgehen, schließt sich wieder zusammen in der

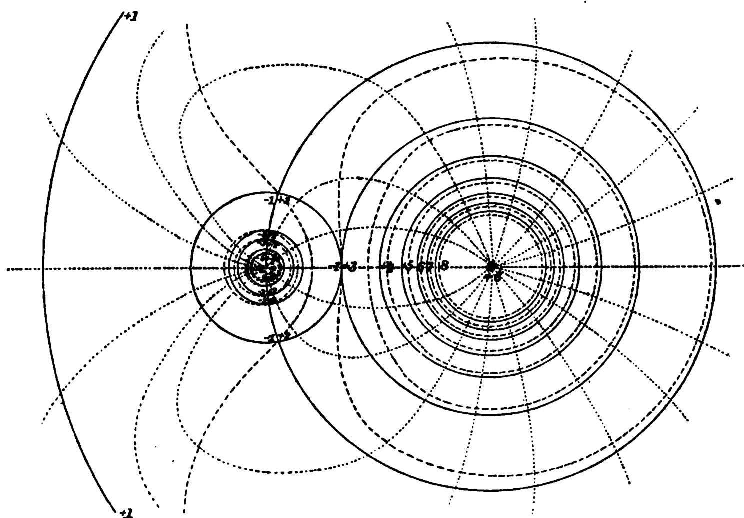


Fig. 39.

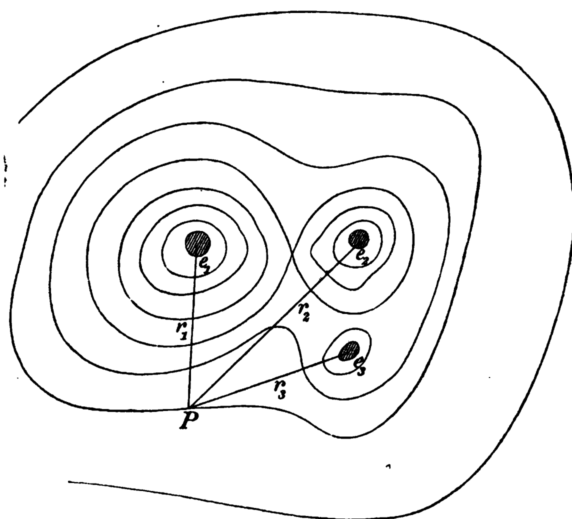


Fig. 40.

Ladung -2, ein anderer Teil (in der Figur die Kraftlinien rechts) verläuft hier, wie in Figur 38 ins Unendliche. Es ist $+6$ ein Quellpunkt von 24π Kraftlinien und -2 eine Sinkstelle für 8π Kraftlinien.

Will man das Kraftfeld von mehr als zwei Ladungen zeichnen, so hat man das Kraftfeld zweier Ladungen durch Superposition mit dem Kraftfelde der dritten, dann dieses zusammengesetzte Kraftfeld mit dem der vierten Ladung usf. einzeln zu verbinden.

So würde z. B. Figur 40 das ungefähre Kraftfeld von drei gleichartigen Ladungen e_1, e_2, e_3 darstellen. Das Potential des Punktes P, das von den drei Ladungen die Entfernungen r_1, r_2, r_3 hat, beträgt

$$V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3}.$$

§ 41. Der Leiter im elektrischen Felde.

Als Leiter haben wir einen Körper bezeichnet, auf dem sich die elektrische Ladung frei bewegen kann, sie folgt also einer auf sie wirkenden Kraft unbegrenzt, d. h. solange wie diese Kraft wirkt.

Bedenken wir nun, daß eine auf ein Agens wirkende Kraft hervorgerufen wird durch eine Potentialdifferenz, so wird auf oder in dem Leiter so lange eine Bewegung der elektrischen Ladung eintreten, bis jede Potentialdifferenz verschwunden ist. Aus der Definition des Leiters folgt daher, daß alle Punkte des Leiters ein und dasselbe Potential haben müssen. Die Bewegung der elektrischen Ladung ist nur durch die Oberfläche des Leiters, also dort begrenzt, wo der Leiter an einen Nichtleiter (gewöhnlich Luft) angrenzt. Nur die Oberfläche des Leiters kann demnach der Sitz elektrischer Ladung sein. Hieraus folgt auch weiter, daß es für die Wirkung eines Leiters in elektrostatischer Hinsicht ganz einerlei ist, ob ein Leiter im Innern massiv oder hohl ist.

Unter Anwendung des Laplace-Poissonschen Satzes (§ 18, Gleichung 20) läßt sich auch mathematisch beweisen, daß das Innere eines Leiters frei von elektrischer Ladung

sein muß. Denn wenn die Koordinaten eines Punktes im Innern des Leiters x, y, z sind, so ergibt sich aus der Konstanz des Potentials, daß

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

ist. Hieraus folgt wieder, daß

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

also endlich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Das heißt nach dem Laplace-Poissonschen Satze aber nichts anderes, als daß die Dichte des Agens, also hier die Dichte der Elektrizität im Punkte x, y, z gleich Null ist. Da x, y, z ein beliebiger Punkt im Innern des Leiters ist, so muß also das ganze Innere des Leiters frei von elektrischer Ladung sein. Diese Tatsache ist in § 36 schon eingehend behandelt, auch sind dort schon einige Versuche angegeben, welche uns von dieser Tatsache überzeugt haben. Auf die Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche eines Leiters kommen wir § 35 noch einmal zurück. Wir wollen jetzt den Fall annehmen, daß der Leiter selbst keine elektrische Ladung besitzt, sich aber in einem elektrischen Kraftfelde befindet, das herrührt von einer punktförmigen Elektrizitätsmenge m.

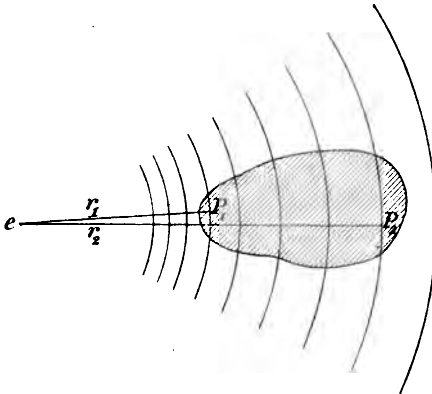


Fig. 41.

Wäre (Fig. 41) der schraffiert gezeichnete Körper ein Nichtleiter von der Art, wie der übrige Teil des Raumes, so würden die Kraftlinien und die Niveauflächen den Körper

durchsetzen und jeder Punkt des Körpers würde das Potential haben, das ihm gemäß der Ladung e und seiner Entfernung von dieser Ladung zukommt. So würde der Punkt P_1 das Potential $V_1 = \frac{e}{r_1}$ und der Punkt P_2 das Potential $V_2 = \frac{e}{r_2}$ haben, wo $V_1 > V_2$ ist, wenn e positiv ist. Da aber der Körper ein Leiter sein soll, so tritt infolge der vorhandenen Potentialdifferenz eine Bewegung der Elektrizität ein, und zwar bewegt sich eine positive Elektrizitätsmenge innerhalb des Körpers von P_1 nach P_2 so lange bis die Potentiale dieser beiden Punkte gleich sind. Die Folge davon ist, daß der Punkt P_1 negativ, der Punkt P_2 positiv elektrisch wird. Diese Scheidung der Elektrizität innerhalb eines im elektrischen Felde befindlichen Leiters heißt die elektrische Influenz. Die Oberfläche des Leiters wird jetzt selbst eine Niveaufläche. Die erzeugte Influenzladung des Körpers bewirkt dann auch eine Deformation des elektrischen Feldes, indem die negative Ladung des dem Punkte e nahen Teiles des Körpers eine Erniedrigung des Potentials, die positive Ladung im entfernteren Teile des Körpers eine Erhöhung des Potentials bewirkt. Auch die Kraftlinien werden dadurch deformiert, und zwar so, daß sie senkrecht zur Oberfläche des Leiters stehen, denn wären sie geneigt zur Oberfläche, so würde noch eine Kraftkomponente in der Richtung der Oberfläche des Körpers vorhanden sein, welche eine fernere Bewegung der Elektrizität

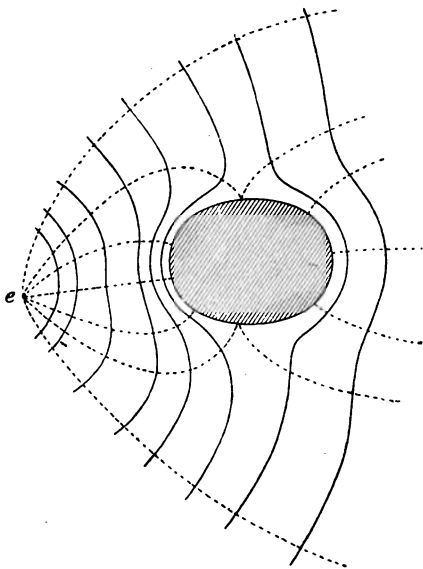


Fig. 42.

auf der Oberfläche bewirken würde. Daß die Kraftlinien normal zur Oberfläche stehen müssen, folgt auch schon daraus, daß die Oberfläche des Leiters eine Niveaufläche ist.

Das Bild des deformierten Kraftfeldes wird durch Figur 42 dargestellt.

§ 42. Zwei kleine leitend verbundene Kugeln im Felde eines elektrischen Punktes.

Am einfachsten sind die Verhältnisse dann zu übersehen, wenn der Leiter aus zwei durch einen verschwindend dünnen Draht miteinander verbundenen kleinen Kugeln vom Radius a besteht, denn in diesem Falle können wir annehmen, daß wegen der geringen Dicke des Verbindungsdrahtes die auf diesem Drahte vorhandene Elektrizitätsmenge vernachlässigt werden kann, und ferner können wir noch annehmen, daß auf jeder der kleinen Kugeln die elektrische Dichte konstant ist. Hat (Fig. 43) die der Elektrizitäts-

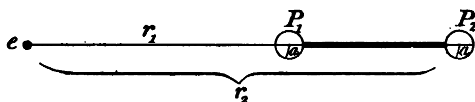


Fig. 43.

menge e nahe Kugel P_1 die Entfernung r_1 von e, die entferntere P_2 die Entfernung r_2, so würden, wenn der leitende Draht nicht vorhanden wäre, die Potentiale in den beiden Punkten $V_1 = \frac{e}{r_1}$, $V_2 = \frac{e}{r_2}$ sein. Bei Herstellung der leitenden Verbindung gleichen sich die Potentiale aus und nehmen den Wert V an. Es ist eine Elektrizitätsmenge $-\varepsilon$ nach P_1 und eine Elektrizitätsmenge $+\varepsilon$ nach P_2 gegangen. Da jede der kleinen Kugeln den Radius a hat, so würde infolge dieser geschiedenen Elektrizitäten auf P_1 das Potential $-\frac{\varepsilon}{a}$, auf P_2 das Potential $+\frac{\varepsilon}{a}$ bestehen. Infolge der schon vorhandenen Potentiale $V_1 = \frac{e}{r_1}$ und $V_2 = \frac{e}{r_2}$, ergeben sich also in P_1 und P_2 die Potentiale

$$V_1 - \frac{\varepsilon}{a} \quad \text{und} \quad V_2 + \frac{\varepsilon}{a}.$$

Diese Potentiale sind infolge der leitenden Verbindung gleich, also ist

$$V = V_1 - \frac{\varepsilon}{a} = V_2 + \frac{\varepsilon}{a}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\varepsilon}{a} = \frac{V_1 - V_2}{2},$$

also

$$\varepsilon = a \cdot \frac{V_1 - V_2}{2},$$

und ferner

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Das entstehende Potential ist also gleich dem arithmetischen Mittel der Einzelpotentiale; die influenzierte Elektrizitätsmenge ist proportional dem Radius der kleinen Kugeln und der Differenz der ursprünglichen Potentialwerte.

Auf dem Verbindungsdrahte herrscht natürlich auch das Potential V, das auf den beiden kleinen Kugeln herrscht. Die beiden Kugeln sowohl, wie auch der Verbindungsdraht zeigen also im allgemeinen gegenüber dem elektrischen Felde eine Potentialdifferenz. Es wird aber auf dem Verbindungsdrahte ein Punkt existieren, auf dem das Potential gleich dem des umgebenden elektrischen Feldes ist. Dieser Punkt soll noch bestimmt werden. Wir brauchen zu dem Zwecke nur den Radius x derjenigen Niveaufläche zu bestimmen, auf der das Potential V herrscht, für den also $V = \frac{e}{x}$ ist. Setzen wir hier den Wert

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2} = \left(\frac{e}{r_1} + \frac{e}{r_2}\right) : 2$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{e}{x} = \left(\frac{e}{r_1} + \frac{e}{r_2}\right) : 2,$$

woraus folgt

$$x = r_1 r_2 : \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right).$$

Der Radius der gesuchten Niveaufläche ist also das harmonische Mittel der beiden Entfernungen r_1 und r_2 der beiden kleinen Kugeln von e. Diese Niveaufläche geht durch den Verbindungsdraht hindurch. Nehmen wir an, die Niveaufläche teilt den Verbindungsdraht in die beiden Teile

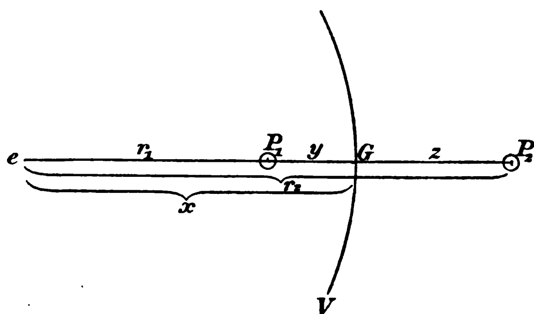


Fig. 44.

y und z (Fig. 44), so berechnet sich aus $y = x - r_1$ und $z = r_2 - x$ unter Benutzung des Wertes für x leicht

$$y = \frac{r_1 (r_2 - r_1)}{r_1 + r_2}, \quad z = \frac{r_2 (r_2 - r_1)}{r_1 + r_2},$$

also

$$y : z = r_1 : r_2 .$$

Es teilt also die Niveaufläche, welche dasselbe Potential, wie die leitend verbundenen Kugeln P_1 und P_2 hat, die Verbindungslinie im Verhältnis der Entfernungen der Kugeln P_1 und P_2 von dem elektrischen Punkte e.

Aus dem Vorigen ergibt sich ferner die Antwort auf die Frage, wie sich die elektrische Influenz gestaltet, wenn eine einzelne kleine leitende Kugel durch einen sehr dünnen Draht so abgeleitet wird, daß auf ihr das Potential Null herrscht. Ohne die Frage augenblicklich zu behandeln, wie man dieses Potential Null herstellt, können wir jedenfalls sagen, daß die eigene Ladung der kleinen Kugel auf ihrer Oberfläche ein Potential erzeugen muß, welches entgegengesetzt gleich dem Potential des von e ausgehenden Feldes sein muß, und da dieses gleich $\frac{e}{r}$ ist, folgt für das Ober-

flächenpotential der Kugel infolge der eigenen Ladung der Wert $-\frac{e}{r}$, wenn das Gesamtpotential „Null“ erzeugt werden soll. Das Oberflächenpotential der eigenen Ladung ist, wenn wieder die Ladung der Kugel gleich ε und ihr Radius gleich a ist, ausgedrückt durch $\frac{\varepsilon}{a}$, also ist

$$\frac{\varepsilon}{a} = -\frac{e}{r}, \quad \text{oder} \quad \varepsilon = -\frac{e \cdot a}{r}.$$

Diese Gleichung setzt uns in den Stand, sowohl das Potential des Punktes, an den die Kugel gebracht ist, wie auch die Größe e zu messen, wenn wir ε messen können, und wenn wir außerdem die Größen a und r, die mit jedem Maßstab bestimmt werden können, kennen.

§ 43. Das Potential einer ausgedehnten, leitenden Kugel in dem von einem elektrischen Punkte erzeugten Kraftfelde.

Es sei wieder e der elektrische Punkt mit der positiven Ladung e. Die Kugel mit dem Mittelpunkte C und dem Radius a habe von e den Mittelpunktsabstand r. Das

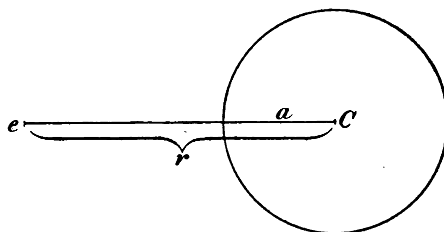


Fig. 45.

Potential auf der Oberfläche der Kugel ist gleich dem Potential jedes Punktes im Innern der Kugel, also auch gleich dem Potential des Mittelpunktes C. Das Potential von C setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich erstens aus dem durch die Ladung e verursachten, welches gleich $\frac{e}{r}$ ist, und

aus dem durch die infolge der Influenzwirkung von e auf der Kugel erzeugten Ladung der Oberfläche. Um letztere zu berechnen, denken wir uns die Oberfläche der Kugel in eine große Zahl sehr kleiner Teile zerlegt. Die Ladung dieser Teile möge $\mu_1\, \mu_2 \ldots \mu_n$ sein, so ist das hierdurch in C erzeugte Potential gleich

$$\frac{\mu_1}{a} + \frac{\mu_2}{a} + \ldots + \frac{\mu_n}{a},$$

oder gleich

$$\frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}{a}.$$

Bedenken wir aber, daß durch die Influenz auf der Kugel immer gleiche Mengen positiver und negativer Elektrizität erzeugt werden, so müssen die einzelnen Werte μ teils positiv, teils negativ sein, und ihre Summe muß gleich Null sein, folglich ist auch

$$\frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}{a} = 0.$$

Die auf der Oberfläche der Kugel erzeugte Influenzladung liefert demnach keinen Beitrag zum Potential des Punktes C. Es ist das Potential von C lediglich gleich

$$V = \frac{e}{r}.$$

Da nun aber das Potential der Oberfläche der Kugel gleich dem von C ist, so folgt auch für das Potential der Oberfläche der Kugel derselbe Wert

$$V = \frac{e}{r}.$$

Das Potential einer leitenden Kugel im Felde eines elektrischen Punktes, der außerhalb der leitenden Kugel liegt, ist gleich dem Potential des Mittelpunktes, das er haben würde, wenn die leitende Kugel gar nicht vorhanden wäre. Das Potential ist unabhängig von dem Radius der Kugel.

§ 44. Der Gaußsche Mittelwertsatz.

Der im vorigen Paragraphen behandelte Satz ist nur ein spezieller Fall eines allgemeineren Satzes, der für jedes Agens, für das ein Potential existiert, gültig ist. Der Satz ist von Gauß zuerst ausgesprochen, er lautet: Das arithmetische Mittel der Potentialwerte für alle Punkte der Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Potential des Mittelpunktes der Kugel.

In Figur 46 habe die Kugel mit dem Mittelpunkte C den Radius a. Das Agens m habe vom Mittelpunkte der Kugel den Abstand r. P sei ein Punkt der Oberfläche der

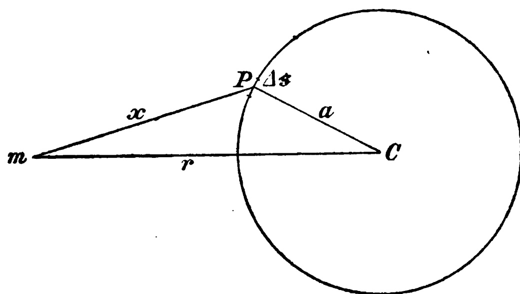


Fig. 46.

Kugel, welcher von m die Entfernung x hat. Es ist das Potential des Punktes P gleich $f\frac{m}{x}$ *). Das Potential ist die auf die Einheit des Agens ausgeübte Arbeit, deshalb denken wir uns in P auf einem kleinen Oberflächenelement Δs die Einheit des Agens verteilt. Wir können in diesem Sinne also auch von dem Potential des Oberflächenelementes Δs reden. In derselben Weise bilden wir die Potentiale für alle übrigen Oberflächenelemente der Kugel und erhalten als Summe aller Potentiale den Wert

$$f\sum\frac{m}{x}.$$

*) Hier hat f wieder dieselbe Bedeutung, wie im ersten Teil des Buches.

Die Anzahl der Potentiale ist so groß, wie das Flächenelement Δs in der Oberfläche der Kugel enthalten ist, also

$$\frac{4\pi a^2}{\Delta s}.$$

Der Mittelwert der Potentiale wird demnach gefunden, indem man die obige Summe durch diese Anzahl dividiert. Man erhält

$$\mathfrak{M} = \frac{\Delta s}{4\pi a^2} \cdot f \sum \frac{m}{x}. \tag{1}$$

$$= \frac{m\,\Delta s}{4\pi a^2} \sum f \cdot \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Jeder einzelne Summand der letzten Summe ist aber gleich dem Potential des Punktes m (nicht der Agensmenge m), der beeinflußt ist von der in Δs befindlichen Einheit der Agensmenge. Die Summation erstreckt sich über die ganze Oberfläche der Kugel, also ist der Wert der Summe gleich dem Potential des Punktes m in dem Kraftfelde der an allen Stellen mit der Einheit des Agens belegten Kugel. Nun ist aber das Kraftfeld einer homogen belegten Kugel außerhalb derselben gleich dem Kraftfelde der im Mittelpunkt vereinigt gedachten Agensmenge (siehe § 8), also ist, da die gesamte Agensmenge gleich $\frac{4\pi a^2}{\Delta s}$ ist,

$$\sum \frac{f}{x} = f \cdot \frac{4\pi a^2}{r\,\Delta s}.$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (2) ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{M} = f \cdot \frac{m\,\Delta s}{4\pi a^2} \cdot \frac{4\pi a^2}{r\,\Delta s} = f \cdot \frac{m}{r}, \tag{3}$$

also gleich dem Potential im Mittelpunkt der Kugel. Hiermit ist aber der oben ausgesprochene Mittelwertsatz bewiesen.

Für eine im Innern der Kugel befindliche Agensmenge m (Fig. 47) ist die Schlußweise bis zur Gleichung (2) dieselbe, aber da jeder Summand der Summe $\sum \frac{f\,\Delta s}{x}$ das Potential eines Elements der Belegung für einen inneren

Punkt der Kugel bedeutet, so ergibt die Summation, die über alle Punkte der Kugeloberfläche für einen inneren Punkt ausgeführt wird, einen Potentialwert, der im Zähler die gesamte Belegung, also die gesamte Agensmenge $4\pi a^2$ hat, der aber im Nenner den Radius der Kugel hat (siehe § 9), also ist

$$\sum f \frac{\Delta s}{x} = f \cdot \frac{4\pi a^2}{a},$$

folglich ergibt sich für diesen Fall (dieser Wert möge $\mathfrak{M}_i$ heißen)

$$\mathfrak{M}_i = f \cdot \frac{m}{4\pi a^2} \cdot \frac{4\pi a^2}{a} = f \cdot \frac{m_i}{a}. \tag{4}$$

Fassen wir endlich die Gleichungen (3) und (4) zusammen und bezeichnen wir alle innerhalb der Kugel befindlichen Agensmengen mit m_i, alle außerhalb derselben belegenen mit m_a, so wird, da das Gesamtpotential gleich der Summe der Einzelpotentiale ist

$$\mathfrak{M} = \sum f \cdot \frac{m_a}{r} + \sum f \frac{m_i}{a}$$
$$= f\left[\sum \frac{m_a}{r} + \sum \frac{m_i}{a}\right].$$

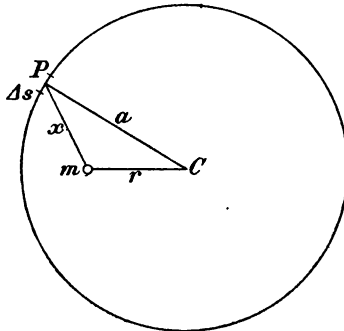


Fig. 47.

Nun sind aber alle Nenner der zweiten Summe gleich, also können wir den Nenner aus dem Summenzeichen setzen, dann bleibt in dem Summenzeichen nur noch Σm_i, das ist die gesamte innerhalb der Kugel liegende Agensmenge, die wir noch M_i nennen können, also ist

$$\mathfrak{M} = f\left(\sum \frac{m_a}{r} + \frac{M_i}{a}\right)$$

der Mittelwert der Potentialwerte auf der Kugel mit dem Radius a.

Aus dem Gaußschen Mittelwertsatz für äußere Agensmengen können wir noch zwei wichtige Schlußfolgerungen ziehen, die für jedes Kraftfeld, besonders aber für das elektrostatische Feld von großer Wichtigkeit sind.

1. Es kann außerhalb eines mit Agens belegten Gebietes das Potential an keiner Stelle ein Maximum oder ein Minimum haben.

Nehmen wir nämlich an, ein Punkt Q sei ein solcher Punkt, in dem das Potential einen Maximalwert (Minimalwert) hätte, so konstruieren wir um den Punkt Q eine Kugel mit dem beliebigen Radius a. Berechnen wir nun die Potentialwerte auf der Oberfläche dieser Kugel, so sind alle Potentialwerte auf der Oberfläche kleiner (größer) als im Mittelpunkte. Nach dem Gaußschen Mittelwertsatz soll das arithmetische Mittel dieser Potentialwerte gleich dem im Mittelpunkte sein. Das ist aber unmöglich, folglich kann weder der Punkt Q noch irgend ein anderer einen Maximalwert oder Minimalwert des Potentials besitzen.

2. Ist das Potential in irgend einer Gegend des Kraftfeldes nach allen Richtungen hin konstant, so muß es überall außerhalb der Agensmengen konstant sein.

Nehmen wir an, das Potential wäre in dem schraffierten Gebiete (Fig. 48) konstant, habe aber außerhalb desselben einen anderen Wert, so konstruieren wir um einen Punkt P in der Nähe der Begrenzung des konstanten Gebietes innerhalb desselben eine Kugel, die so groß ist, daß sie in das variable Gebiet hinübergreift, aber doch so klein, daß sie uur solche Teile des variablen Gebietes einschließt, die entweder alle größere oder alle kleinere Potentialwerte, wie das konstante Gebiet besitzen. Wenden wir auf diese Kugel wieder den Mittelwertsatz an, so sehen wir, daß zu den im Innern des konstanten Gebietes liegenden Potentialwerten nur größere (oder nur kleinere) Potentialwerte einen Beitrag zum Mittelwert liefern. Daraus folgt, daß der Mittelwert selbst dadurch größer (oder kleiner) wird. Da aber P

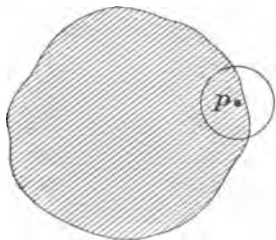


Fig. 48.

innerhalb des konstanten Gebietes liegt, ist es ausgeschlossen, daß der Mittelwert größer oder kleiner wird, als die Potentialwerte derjenigen Teile der Kugeloberfläche, die im konstanten Gebiete liegen. Der über das vorhin begrenzte Gebiet hinübergreifende Teil der Kugel muß also auch dasselbe Potential haben, wie das Gebiet selbst. Wir können so das Gebiet des konstanten Potentials beliebig erweitern, d. h. das Potential ist überall konstant.

§ 45. Potential eines Leiters infolge innerer Ladung.

Wir gehen wieder zurück auf unser elektrostatisches Feld. Der in § 43 abgeleitete Satz über das Potential einer leitenden Kugel im Felde eines elektrischen Punktes läßt sich aus dem Mittelwertsatz leicht herleiten, denn da auf der Oberfläche des Leiters das Potential konstant ist, so ist der Mittelwert des Potentials eben derselbe konstante Wert. Nach dem Mittelwertsatz ist aber der Mittelwert des Potentials gleich dem Potential im Mittelpunkte, folglich muß hier auch das konstante Potential jedes Punktes der Oberfläche gleich dem Potential des Mittelpunktes sein.

Der zweite Teil des Mittelwertsatzes, der sich auf innere Agensmengen bezieht, hat weitere wichtige elektrostatische Erscheinungen zur Folge. Wenn man nämlich in das Innere einer leitenden Kugel eine oder mehrere elektrische Ladungen bringt, so erzeugen sie nach dem zweiten Teil des Mittelwertsatzes das Potential

$$\mathfrak{M}_i = f \cdot \frac{M_i}{a}.$$

Wir haben in der Elektrostatik den Faktor f durch die passende Wahl unserer elektrostatischen Einheiten gleich eins gesetzt, also können wir, wenn wir wieder das Potential V nennen, schreiben

$$V = \frac{M_i}{a}.$$

Da das Potential auf allen Punkten der leitenden Kugel gleich ist, so ist der obige Ausdruck auch das Potential jedes Punktes der Kugel. Man ersieht hieraus, daß das von einer inneren Ladung M_i herrührende Potential gänzlich unabhängig ist von der Lage der Ladung M_i innerhalb der

Kugel. Man kann die Ladung im Innern der Kugel bewegen wie man will, ohne daß eine Änderung des Potentials der Oberfläche eintritt. Ja man kann sogar die gesamte Ladung auf die Oberfläche bringen, ohne daß sich das Potential ändert. Wenn wir demnach in das Innere eines kugelförmigen Leiters eine elektrische Ladung einführen, so nimmt in dem Augenblicke, wo die Ladung von der Kugel ganz umschlossen wird, die Kugel das durch obige Formel bedingte Potential an und behält beim Bewegen der Ladung innerhalb des Hohlraumes dauernd seinen Wert bei. Bringt man nun die Innenwandung des Hohlraumes mit der eingeführten Ladung in leitende Verbindung, so tritt jetzt die gesamte Ladung auf die Oberfläche der Kugel, aber der Wert des Potentials bleibt ungeändert.

Diese Konstanz des Potentials eines geschlossenen Leiters gilt nicht nur für kugelförmige, sondern für Leiter jeder beliebigen geschlossenen Form. Es folgt dieses auch aus der konstanten Größe des Kraftflusses, der nach § 39 unabhängig von der Lage der Ladung e immer den Wert $4\pi e$ hat.

§ 46. Das Potential „Null“.

Das Potential „Null“ herrscht im Unendlichen, denn dort wird $\frac{e}{r}$ infolge des unendlich großen Wertes von r zu Null.

Wir können für praktische Zwecke das Potential der Erde als das Nullpotential ansehen, wenn wir annehmen, daß die Erde keine eigene elektrische Ladung besitzt. Wir werden allerdings noch erfahren, daß diese Annahme nicht berechtigt ist. Trotzdem können wir den elektrischen Zustand der Erde als den normalen ansehen und alle elektrischen Ladungen, die sich der Erde gegenüber wie positive Ladungen verhalten, als positive Ladungen, ebenso alle elektrischen Ladungen, die sich der Erde gegenüber wie negative Ladungen verhalten, als negative Ladungen bezeichnen. Es ist offenbar für unsere Zwecke ganz gleichgültig, welchen Zustand wir als den Ausgangspunkt unserer Rechnung und Zählung ansehen, gerade so wie man die Höhen und Tiefen von Bergen und Tälern von einer beliebigen Nullhöhe aus messen kann. Gewöhnlich nimmt man für die Höhenmessung als

Nullniveau die mittlere Meereshöhe an, doch liegt die Willkürlichkeit dieses Nullpunktes offen zu Tage.

Wenn wir keine Eigenladung der Erde annehmen, können wir aber mit vollem Rechte auch das Oberflächenpotential der Erde als Nullpotential annehmen, auch dann, wenn wir außerhalb der Erdoberfläche größere elektrische Ladungen an einem Punkte anstauen oder aufsammeln. Das Oberflächenpotential einer Kugel, die von einer äußeren Ladung e beeinflußt wird, ist ausgedrückt durch $\frac{e}{r}$. Hier ist r der Radius der Erde, welcher im Vergleich zu den für uns in Betracht kommenden künstlichen äußeren Ladungen so groß ist ($r = 6{,}37 \cdot 10^8$ cm), daß der Wert von $\frac{e}{r}$ auch dann in Wegfall käme, wenn allein die Ladung e auf die Erde einwirkte. Bedenken wir aber, daß wir bei Erzeugung der Elektrizitätsmenge $+e$ auf der Erde immer eine ebenso große Ladung $-e$ erzeugen, die wir nur von der positiven Ladung getrennt, also an eine andere Stelle gebracht haben, so haben wir stets außer dem Potential $\frac{+e}{r}$ noch das gleich große Potential $\frac{-e}{r}$, und da das Gesamtpotential wieder gleich der Summe der Einzelpotentiale ist, so folgt, daß das Gesamtpotential der Erde stets gleich Null ist. Wir sind durch kein Mittel imstande, dieses Potential der Erde zu ändern. Die Bestimmung über den Nullwert des Potentials ist deshalb so wichtig, weil wir nicht imstande sind, einen absoluten Potentialwert zu messen, denn da nur bei Potentialdifferenzen Kraftwirkungen auftreten, die wiederum Arbeit leisten können, so können wir auch nur die Potentialdifferenzen daran messen, daß die dadurch hervorgerufenen Kräfte Arbeit leisten können, oder daß wir zur Hervorbringung dieser Potentialdifferenzen Arbeit leisten müssen.

§ 47. Kapazität eines Leiters.

Wenn wir zwei Kugeln mit den Radien r_1 und r_2 haben und führen in den Hohlraum jeder Kugel die Elektrizitätsmenge $+e$ ein, so entsteht auf der ersten Kugel das

Potential $\frac{+e}{r_1}$, auf der zweiten das Potential $\frac{+e}{r_2}$. Es hängt also das erzeugte Potential außer von der eingeführten Elektrizitätsmenge ab von dem Radius der Kugel. Wollen wir den beiden Kugeln dasselbe Potential mitteilen, so müssen wir, wenn r_1 und r_2 ungleich sind, in dieselben die ungleichen Elektrizitätsmengen $+e_1$ und $+e_2$ einführen, so daß nun $\frac{e_1}{r_1} = \frac{e_2}{r_2}$ ist.

Hieraus folgt, das bei Gleichheit des Potentials der größeren Kugel eine größere Elektrizitätsmenge zugeführt werden muß, als der kleineren, und zwar müssen die Elektrizitätsmengen den Radien der Kugeln proportional sein. Wollen wir auf der Kugel mit dem Radius r_1 das Potential „eins" erzeugen, so muß $\frac{e_1}{r_1} = 1$, also $e_1 = r_1$ sein. Die auf diese Weise berechnete Elektrizitätsmenge wird die Kapazität der Kugel genannt. Die Kapazität einer leitenden Kugel (eines Leiters überhaupt) ist diejenige Elektrizitätsmenge, die dem Leiter zugeführt werden muß, um ihm das Potential eins zu erteilen.

Die Kapazität einer leitenden Kugel ist gleich dem Radius der Kugel.

Die Einheit der Kapazität hat eine leitende Kugel mit dem Radius von 1 Zentimeter, denn hier erzeugt die Einheit der Elektrizitätsmenge das Potential eins.

Die Bestimmung der Kapazität anders geformter Körper ist meist mit großen mathematischen Schwierigkeiten verbunden. Für einige der wichtigsten Körper werden wir die Berechnung der Kapazität noch ausführen.

Aus der Definition der Kapazität ergibt sich auch noch folgende einfache Beziehung. Nennt man die Kapazität eines Leiters C, die dem Leiter zugeführte Elektrizitätsmenge e und das hierdurch erzeugte Potential V, so ist

$$C \cdot V = e, \quad \text{oder} \quad V = \frac{e}{C}, \quad C = \frac{e}{V}.$$

Man kann also die Kapazität auch definieren als den Quotienten aus der Elektrizitätsmenge und dem Potential, welches diese Elektrizitätsmenge erzeugt.

§ 48. Veranschaulichung der Kapazität.

Man kann den Begriff der elektrostatischen Kapazität auf folgende Weise gut veranschaulichen: Man benutzt einige Glasflaschen, von denen zwei das Volumen von einem Liter, einige andere ein größeres vorher oder nachher zu bestimmendes Volumen haben und versieht jede der Flaschen mit einem doppelt durchbohrten Gummistopfen, in die je ein rechtwinklig gebogenes Glasrohr hineingesteckt wird. Außerdem braucht man noch ein offenes Quecksilbermanometer und eine kleine Fahrradpumpe als Kompressionspumpe, an welche man noch das in einem Fahrradschlauche vorhandene Ventil anschließen muß, damit man die Fahrradpumpe als Kompressionspumpe benutzen kann.

Nun verbindet man das eine im Gummistopfen der Literflasche steckende Glasrohr mit dem offenen Quecksilbermanometer, das andere mit der Fahrradpumpe. Bewegt man dann den Pumpenkolben einmal auf und ab, so wird eine ganz bestimmte Luftmenge in die Literflasche befördert, und der Luftdruck in der Flasche erhält einen am Manometer ablesbaren Wert von beispielsweise 5 cm Überdruck (der sich natürlich nach der Größe der benutzten Pumpe richtet). Macht man denselben Versuch mit der zweiten Literflasche, so bekommt man bei einmaliger Pumpenbewegung denselben Druckwert, wie vorhin. Nun verbindet man beide Flaschen miteinander, indem man das eine Glasrohr der einen Flasche mit dem einen der zweiten Flasche durch einen Gummischlauch verbindet, und schließt dann an die noch freien Glasrohre die Fahrradpumpe und das Manometer an. Um denselben Überdruck wie vorhin zu erreichen, muß man die Pumpe jetzt zweimal auf und ab bewegen. Es ist also die doppelte Luftmenge erforderlich, um 2 Litern Luft dieselbe Druckvermehrung zu erteilen, wie einem Liter.

Macht man endlich denselben Versuch mit den größeren Flaschen, so kann man aus der Anzahl der Pumpenzüge, die zur Hervorbringung desselben Druckes erforderlich sind, das Volumen der Flaschen, d. i. die Aufnahmefähigkeit der Flaschen bestimmen.

Es entspricht bei diesen Versuchen das Volumen der in der Fahrradpumpe enthaltenen Luft der Elektrizitätsmenge

„eins", die am Manometer ablesbare Druckvermehrung dem Potential des Leiters und das Volumen der Flaschen der Kapazität des Leiters.

§ 49. Verteilung der Ladung zwischen zwei Leitern mit verschiedener Kapazität. Spitzenwirkung.

Zwei Leiter mögen die Kapazität C_1 und C_2 haben, sie mögen durch einen sehr dünnen (sogenannten kapazitätsfreien) Draht miteinander verbunden sein, aber so weit sollen sie voneinander entfernt sein, daß sie nicht gegenseitig ihr Potential, also auch ihre Ladungsverteilung beeinflussen.

Führt man den verbundenen Leitern die Elektrizitätsmenge e zu, so müssen die erzeugten Potentiale gleich sein.

Da nun nach § 48

$$V = \frac{e}{C}$$

ist, so folgt für jeden der Leiter

$$V_1 = \frac{e_1}{C_1}, \quad V_2 = \frac{e_2}{C_2},$$

und da offenbar

$$e_1 + e_2 = e,$$

und da ferner bei ihrer Verbindung

$$V_1 = V_2$$

ist, ergibt sich

$$\frac{e_1}{C_1} = \frac{e - e_1}{C_2},$$

also

$$e_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot e,$$

und ebenso

(1) $$e_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot e.$$

Diese Beziehungen sind deshalb wichtig, weil man aus ihnen erkennt, daß die Verteilung der den verbundenen Körpern mitgeteilten Elektrizitätsmenge im Verhältnisse ihrer Kapazitäten geschieht. Verbindet man

einen Leiter von großer Kapazität mit einem von kleiner Kapazität, so ist die auf dem ersteren aufgesammelte Elektrizitätsmenge annähernd dieselbe, als ob der kleine Leiter gar nicht vorhanden wäre, denn es ist dann

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

nahezu der Einheit gleich. Andererseits ist die auf dem kleinen Leiter befindliche Elektrizitätsmenge um so geringer, je größer die Kapazität des großen Leiters ist.

In dem speziellen Falle, daß die beiden Leiter kugelförmig sind, können wir nach § 48 die Kapazität der Kugeln gleich den Radien setzen, also ist dann

$$e_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot e \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cdot e \, .$$

Führen wir noch den Begriff der *Oberflächendichte* ein als diejenige Elektrizitätsmenge, die auf der Flächeneinheit sich befindet, und bezeichnen wir diese Oberflächendichte mit ϱ, so ist für eine Kugel die gesamte Ladung

$$e = 4\pi r^2 \cdot \varrho \, ,$$

also unter Benutzung der Indizes für unsere beiden Kugeln

$$e_1 = 4\pi r_1^2 \cdot \varrho_1 \quad \text{und} \quad e_2 = 4 r_2^2 \cdot \varrho_2 \, .$$

Hieraus folgt für ϱ_1 und ϱ_2

$$\varrho_1 = \frac{e_1}{4\pi r_1^2} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot \frac{1}{4\pi r_1^2} \cdot e = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{e}{4\pi (r_1 + r_2)} \, ,$$

und ebenso

(2) $$\varrho_2 = \frac{1}{r_2} \cdot \frac{e}{4\pi (r_1 + r_2)} \, .$$

Hieraus folgt für das Verhältnis der Oberflächendichte

(3) $$\varrho_1 : \varrho_2 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} \, .$$

Bei zwei leitend verbundenen Kugeln ist das Verhältnis der Oberflächendichte den Radien der Kugeln umgekehrt proportional.

Ist demnach der Radius der einen Kugel sehr klein, der der anderen Kugel groß, so kann die Oberflächendichte

auf der kleinen Kugel einen außerordentlich großen Wert annehmen. Hieraus erklärt sich die Wirkung der Spitzen, denn wenn man eine Spitze als eine Kugel von verschwindend kleinem Radius ansieht, so erreicht die Oberflächendichte hier einen solch großen Wert, daß die elektrische Ladung eine Durchbrechung der isolierenden Lufthülle zur Folge haben kann: es strömt die Elektrizität aus den Spitzen aus.

Noch von einem anderen Gesichtspunkte aus läßt sich das Ausströmen aus den Spitzen erklären. Wir gehen wieder aus (Fig. 49) von zwei leitend miteinander verbundenen Kugeln mit den Mittelpunkten P_1 und P_2 und mit den Radien r_1 und r_2. Die Oberflächen dieser Kugeln sind

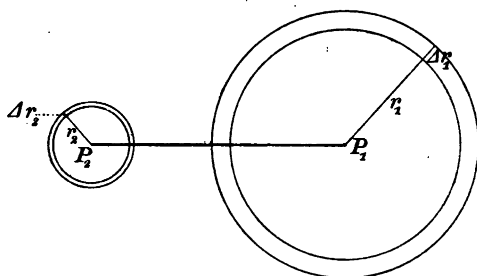


Fig. 49.

Niveauflächen für das Potential V. Das Potential ist, wenn wieder die elektrischen Ladungen mit e_1 und e_2 bezeichnet werden, gleich

$$(4) \qquad V = \frac{e_1}{r_1} = \frac{e_2}{r_2}.$$

Wir wollen jetzt den Radius derjenigen Niveaufläche bestimmen, die um denselben Betrag ΔV bei beiden Kugeln geringer ist, als V. Es seien die Radien dieser Niveauflächen $r_1 + \Delta r_1$ und $r_2 + \Delta r_2$. Dann ist offenbar für beide Kugeln

$$(5) \qquad V - \Delta V = \frac{e_1}{r_1 + \Delta r_1} = \frac{e_2}{r_2 + \Delta r_2}.$$

Gleichung (5) können wir auch schreiben

$$\frac{r_1 + \Delta r_1}{e_1} = \frac{r_2 + \Delta r_2}{e_2}.$$

Hiervon subtrahieren wir die umgeformte Gleichung (4)

$$\frac{r_1}{e_1} = \frac{r_2}{e_2},$$

und erhalten

$$\frac{\Delta r_1}{e_1} = \frac{\Delta r_2}{e_2}.$$

Diese Gleichung dividieren wir durch die vorige und erhalten nach geringer Umformung

(6) $$\frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß die Abstände der Niveauflächen von gleicher Potentialdifferenz bei beiden Kugeln verschieden groß sind, und zwar sind sie den Radien der Kugeln direkt proportional. Sie liegen bei der kleinen Kugel um so vielmal enger aneinander, als der Radius der kleinen Kugel in der der großen enthalten ist.

Den reziproken Wert dieses Abstandes zweier um denselben Betrag verschiedener Niveauflächen haben wir das Potentialgefälle (§ 14) genannt und haben uns früher davon überzeugt, daß das Potentialgefälle proportional der an der betreffenden Stelle des Kraftfeldes herrschenden Feldstärke ist. Nennen wir nun die Feldstärke in der Nähe der Oberfläche der großen Kugel H_1 und in der Nähe der Oberfläche der kleinen Kugel H_2, so folgt, daß

$$H_1 : H_2 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2}$$

ist. Das ist aber die Kraft, mit welcher die Einheit der elektrischen Ladung in der Richtung der Kraftlinien, senkrecht zu den Niveauflächen, also hier senkrecht zur Oberfläche der Kugel beeinflußt wird. Wir sehen hieraus, daß die auf der Oberfläche der Kugeln vorhandene Ladung auf der kleinen Kugel mit einer um so größeren Kraft nach außen getrieben wird, je kleiner der Radius der Kugel ist. Wird der Radius der Kugel verschwindend klein, so wird an dieser Stelle die Kraft, mit der die Ladung sich von der Oberfläche entfernen will, außerordentlich groß und zwar kann sie so groß werden, daß sie die isolierende Lufthülle in Form von Büschelentladungen durchbrechen kann.

Offenbar gilt diese Überlegung nur so lange, als die beiden Kugeln nicht ihr elektrostatisches Kraftfeld gegenseitig beeinflussen, wenn also die Kugeln weit voneinander entfernt sind. Sind die Kugeln dicht beieinander, so daß die kleine Kugel im wirksamen Kraftfelde der ersten liegt, so findet zwar durch die Anwesenheit der kleinen Kugel eine gewisse Deformation des Kraftfeldes der großen Kugel statt, aber der Charakter des Kraftfeldes der großen Kugel bleibt doch erhalten. Hieraus kann man nun noch die weitere Schlußfolgerung ziehen, daß die ausstrahlende Wirkung einer Spitze nur dann eintreten wird, wenn die Spitze von dem Hauptkörper weiter absteht. So erklärt es sich auch, daß Unebenheiten und Vorsprünge geringer Höhe im Vergleich zum Hauptkörper auch dann fast gar keine Spitzenwirkung zeigen, wenn sie nadelscharf sind, eine Tatsache, die mit der Beobachtung durchaus übereinstimmt. Es mag auch bei dieser Gelegenheit erwähnt werden, daß die von manchen Seiten betonte Spitzenwirkung der Blitzableiter auf der Erde nur in ganz besonderen Fällen eintreten wird. Die Spitze liegt eben innerhalb eines elektrostatischen Feldes von solcher Mächtigkeit, daß das eigene Feld der Spitze vollkommen dagegen verschwindet. In der Tat müßten wir, wenn die Spitzenwirkung des Blitzableiters von nennenswerter Bedeutung wäre, bei jeder elektrischen Potentialdifferenz das sogenannte St. Elmsfeuer beobachten können, während wir in Wirklichkeit nur äußerst selten und unter ganz besonderen Verhältnissen diese Büschelausstrahlung der Elektrizität an scharf hervortretenden Masten, Turmspitzen oder Häuservorsprüngen beobachten können.

§ 50. Elektrische Bilder.

Wir haben in § 40 das durch zwei elektrische Ladungen erzeugte Kraftfeld behandelt sowohl für den Fall, daß die beiden Ladungen gleiches, wie auch, daß sie ungleiches Vorzeichen haben. Doch wollen wir noch einmal den Fall der entgegengesetzten Ladung zweier Punkte behandeln und uns besonders mit der Niveaufläche vom Potentialwerte Null beschäftigen. Diese Niveaufläche ist deshalb von Interesse, weil wir dieselbe durch einen leitenden mit der Erde durch einen dünnen Draht leitend verbundenen Körper ersetzen

können, ohne daß dadurch an dem ganzen elektrischen Felde etwas geändert wird. Es seien also die beiden Ladungen $+e_1$ und $-e_2$ in den Punkten A und B (Fig. 50) vorhanden, welche voneinander die Entfernung b haben. Hier

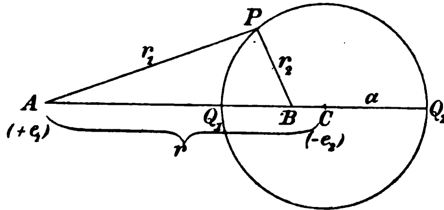


Fig. 50.

soll durch das Vorzeichen ausdrücklich die Art der Ladung bezeichnet werden. Der Punkt P habe von e_1 die Entfernung r_1 und von e_2 die Entfernung r_2. Es soll der geometrische Ort für P unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß sein Potential gleich Null ist.

Das Potential von P ist

$$V = \frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2},$$

und da dieses gleich Null sein soll, ist

$$\frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2} = 0,$$

das heißt

$$\frac{e_1}{r_1} = \frac{e_2}{r_2},$$

oder

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{e_1}{e_2}.$$

Da die Ladungen e_1 und e_2 gegeben, also konstant sind, so ist auch das Verhältnis derselben konstant. Der geometrische Ort von P hat also die Eigenschaft, daß das Verhältnis seiner Entfernungen von den gegebenen Punkten konstant ist. Betrachten wir nur die Figur in der Zeichenebene, so wissen wir, daß ein Kreis diese Bedingung erfüllt, und

zwar der Kreis, der als Durchmesser die Strecke zwischen denjenigen beiden Punkten hat, welche die Verbindungslinie von e_1 mit e_2 harmonisch im Verhältnis $e_1 : e_2$ teilen. Um die ganze Niveaufläche zu finden, lassen wir die Figur um b als Achse rotieren. So entsteht eine Kugel, deren Durchschnitt mit der Zeichenebene der gezeichnete Kreis ist. Wir können diese Kugelfläche aus dünnem Metall hergestellt denken und mit der Erde in leitende Verbindung bringen, ohne daß irgend eine Veränderung des gesamten Kraftfeldes eintritt. Ist dieses geschehen, so können wir die äußere Ladung $+ e_1$ völlig entfernen. Dadurch wird an dem Felde im Innern der Kugel nichts geändert. Ebenso können wir aus dem Innern der Kugel die Ladung $- e_2$ entfernen, ohne daß dadurch an dem äußeren Felde etwas geändert wird. Aus dem Verhältnis der harmonischen Teilung ergibt sich, wenn wir die Durchschnittspunkte der Kugel mit AB und der Verlängerung von AB mit Q_1 und Q_2 bezeichnen,

$$AQ_1 : BQ_1 = AQ_2 : BQ_2 .$$

Hieraus folgt nach Anwendung des Satzes über korrespondierende Addition aus der Proportionslehre

$$AQ_1 : BQ_1 = (AQ_1 + AQ_2) : (BQ_1 + BQ_2) .$$

Beachten wir, daß $AQ_1 + AQ_2 = 2\,AC$ und daß $BQ_1 + BQ_2 = 2\,CQ_1$ ist, so folgt

$$AQ_1 : BQ_1 = 2\,AC : 2\,CQ_1 .$$

Nennen wir die Entfernung von A bis zum Mittelpunkt der Kugel r und den Kugelradius a, so wird

$$AQ_1 : BQ_1 = r : a .$$

Es verhält sich ferner

$$r_1 : r_2 = AQ_1 : BQ_1 ,$$

also ist auch

$$r_1 : r_2 = r : a ,$$

folglich auch

$$e_1 : e_2 = r : a .$$

Daraus ergibt sich

$$e_2 = \frac{a}{r} \cdot e_1 .$$

Soll demnach die Kugel um C sowohl der Größe nach (durch a) und der Lage nach (durch r) gegeben sein, und fragen wir, welche negative Ladung $-e_2$ im Innern der Kugel angebracht werden muß, damit das Potential auf der Kugel in gemeinsamer Wirkung mit der außen befindlichen Ladung $+e_1$ den Wert Null bekommt, so lautet die Antwort, daß diese Ladung die Größe

$$e_2 = \frac{a}{r} \cdot e_1$$

haben muß. Die Entfernung der Ladung vom Mittelpunkte der Kugel berechnet sich leicht zu

$$BC = \frac{a^2}{r}.$$

Wir können das Resultat auch folgendermaßen formulieren: Die positive Ladung $+e_1$ in A erzeugt auf der Kugel eine negative Influenzladung; die Verteilung dieser negativen Influenzladung ist so, daß ihre Wirkung auf den äußeren Raum dieselbe ist, wie sie auch eine in B angebrachte negative Ladung von der Größe

$$-e_2 = \frac{-a}{r} e_1$$

hervorbringen würde. Man kann die mit der Erde leitend verbundene Kugel durch die negative Ladung in B ersetzen. Daher hat der Punkt B den Namen „das elektrische Bild" des Punktes A erhalten, indem sich der Punkt B zum Punkte A in bezug auf die Kugel ähnlich verhält, wie das optische Bild eines Gegenstandes zum Gegenstande.

Das elektrische Bild findet Anwendung bei der Berechnung der Verteilung der Influenzladung auf einem leitenden Körper, insofern als man dann den influenzierenden Punkt durch sein elektrisches Bild ersetzen kann. Hierdurch wird die Rechnung oft wesentlich vereinfacht.

§ 51. Das Potential eines Leiters auf sich selbst.

Um einen Leiter mit einer gewissen Elektrizitätsmenge e zu laden, ist eine gewisse Arbeit notwendig, indem man jedes Element der elektrischen Ladung de entgegen den

Kraftlinien auf den Leiter transportieren muß. Diese durch das Laden des Leiters verbrauchte Arbeit äußert sich nach dem Laden darin, daß der geladene Leiter selbst wieder Arbeit zu leisten imstande ist. In diesem Sinne redet man auch von der Energie des geladenen Leiters. Oder man nennt die zum Laden erforderliche Arbeit das Potential des Leiters auf sich selbst.

Zur Berechnung dieses Potentials auf sich selbst nehmen wir an, der Leiter habe die Kapazität C, dann ist nach § 47 die elektrische Ladung e mit dem Potential V und der Kapazität C verbunden durch die Gleichung

$$e = C \cdot V.$$

Hat nun in einem bestimmten Augenblicke des Ladens der Leiter das Potential V, so heißt das, daß zum Transport der Einheit der elektrischen Ladung aus dem Unendlichen (oder von der Erde) auf den Leiter die Arbeit V erforderlich ist. Wir wollen das Element der elektrischen Ladung de auf den Leiter bringen. Dazu ist die Arbeit $de \cdot V$ erforderlich; da aber

$$V = \frac{e}{C}$$

ist, können wir auch diese Arbeitsmenge schreiben

$$dA = \frac{e \cdot de}{C}.$$

Zur Berechnung der Arbeit, die zum Transport der ganzen Elektrizitätsmenge erforderlich ist, haben wir zu integrieren und erhalten

$$A = \int \frac{e\,de}{C}.$$

Die Integrationsgrenzen sind, wenn wir die Gesamtarbeit berechnen wollen, 0 und e, so daß also wird

$$A = \int_0^e \frac{e\,de}{C}.$$

Da C konstant ist, wird

$$A = \frac{1}{C}\int_0^e e\,de = \frac{1}{C}\cdot\tfrac{1}{2}e^2\,,$$

oder umgeformt

$$A = \tfrac{1}{2}e\cdot\frac{e}{C}\,.$$

Setzen wir wieder

$$\frac{e}{C} = V\,,$$

so erhalten wir schließlich

$$A = \tfrac{1}{2}e\,V$$

als den Ausdruck für das Potential des Leiters auf sich selbst.

§ 52. Das Potential auf den beiden Seiten einer elektrisch geladenen Fläche.

Es sei (Fig. 51) eine Kugel mit dem Mittelpunkte C, dem Radius r und der gleichmäßigen Flächendichte ϱ ge-

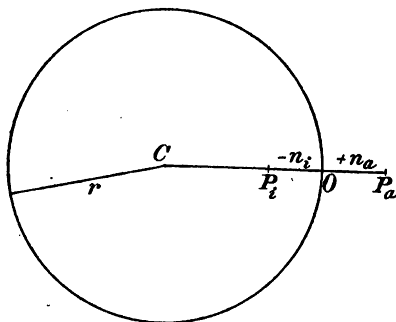


Fig. 51.

geben. Die Aufgabe besteht darin, das Potential und seinen ersten Differentialquotienten in der Richtung nach der Oberfläche der Kugel für einen äußeren und für einen inneren Punkt zu bestimmen.

Wir wählen zwei Punkte P_a und P_i, welche in der Nähe des Punktes O auf demselben Radius bzw. auf der Verlängerung dieses Radius liegen. Der Abstand der beiden Punkte von der Oberfläche sei $+n_a$ und $-n_i$.

Nach § 8 und 9 können wir die beiden Potentiale V_i und V_a berechnen, da für einen äußeren Punkt die ganze Ladung so wirkt, als ob sie im Mittelpunkte vereinigt wäre, und da für einen inneren Punkt das Potential dasselbe ist, wie für die Oberfläche selbst. Hieraus folgt, wenn die Gesamtladung e ist,

$$V_a = \frac{e}{r + n_a}, \quad V_i = \frac{e}{r}.$$

Zur Bestimmung der Kraft, mit welcher die Ladung auf die elektrostatische Einheit in der Richtung nach der Kugeloberfläche wirkt, bilden wir die ersten Differentialquotienten

$$\frac{\partial V_a}{\partial n_a} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V_i}{\partial n_i}.$$

Wir erhalten, da V_i konstant ist,

$$\frac{\partial V_a}{\partial n_a} = -\frac{e}{(r + n_a)^2}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial n_i} = 0.$$

Nun rücken wir die Punkte P_i und P_a immer näher bis an die Oberfläche heran. Das drücken wir dadurch aus, daß wir n_a und n_i einzeln gleich Null setzen. Andererseits wollen wir durch den Index $()_{+0}$ und $()_{-0}$ zum Ausdruck bringen, daß die Werte dadurch entstanden sind, daß wir von der positiven (der Außenseite) Seite bzw. von der negativen (der Innenseite) Seite bis an die Oberfläche herangegangen sind. Dann wird

$$(V)_{+0} = \frac{e}{r}, \quad (V)_{-0} = \frac{e}{r}.$$

Es sind also die Potentialwerte unabhängig davon, von welcher Seite wir auf die Oberfläche kommen. Setzen wir noch, da die Flächendichte ϱ, also die gesamte Ladung $e = 4\pi r^2 \varrho$ ist, diese Werte ein, so wird

$$(V)_{+0} = (V)_{-0} = 4\pi r \varrho.$$

Die Differentialquotienten dagegen verhalten sich anders. Wir setzen ebenfalls in die Formeln

$$\frac{\partial V_a}{\partial n_a} = -\frac{e}{(r+n_a)^2}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial n_i} = 0$$

die Werte $n_a = 0$ und $n_i = 0$ ein und drücken dieses durch die Indizes $(\,)_{+0}$ und $(\,)_{-0}$ aus. Wir erhalten dann

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} = -\frac{e}{r^2}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = 0\,.$$

Durch Subtraktion der beiden Ausdrücke bekommen wir

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -\frac{e}{r^2},$$

oder da $e = 4\pi r^2 \varrho$,

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\varrho\,.$$

Diese Gleichung zeigt uns also, daß es für die Kraftwirkung nach der Oberfläche nicht gleichgültig ist, ob wir uns der Kugeloberfläche von außen oder von innen nähern. Vielmehr tritt in dem Augenblick, wo wir von der einen Seite durch die Fläche hindurch auf die andere Seite kommen, ein Sprung der Kraftgröße um den Betrag $-4\pi\varrho$ ein. Diese Tatsache ist deshalb so wichtig, weil sie für jede beliebige Fläche genau denselben Wert ergibt.

Wir wollen dieselbe Beziehung noch ableiten für eine gleichmäßig mit elektrischer Ladung von der Flächendichte ϱ belegte kreisförmige Fläche. Dieselbe möge (Fig. 52) dargestellt sein. Der Mittelpunkt sei O, der Radius a. Wir errichten in der Mitte derselben das Lot OZ und nehmen auf diesem den Punkt P an, so daß $OP = h$ ist. Um das Flächenelement und demnach auch das Element der elek-

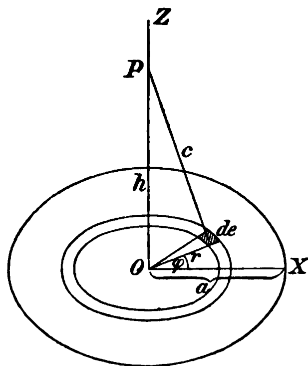


Fig. 52.

trischen Ladung zu bestimmen, ziehen wir von O aus die beliebige Gerade OX. Dann konstruieren wir zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und $r + dr$, und ziehen die beiden Radien, welche mit OX die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$ einschließen. Das Flächenelement ist alsdann ausgedrückt durch $r \cdot d\varphi \cdot dr$, also das Element der elektrischen Ladung durch $r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot \varrho$. Das durch dieses Element in P erzeugte Potential ist, wenn wir noch den Abstand des Flächenelementes von P mit c bezeichnen

$$dV = \frac{de}{c} = \frac{r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot \varrho}{c},$$

oder da

$$c = \sqrt{h^2 + r^2},$$

$$dV = \frac{r\, d\varphi\, dr \cdot \varrho}{\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Um das Gesamtpotential in P zu erhalten, müssen wir alle Einzelpotentiale summieren und zwar einmal für r zwischen den Grenzen 0 und a und dann für φ zwischen den Grenzen 0 und 2π.

$$V = \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r\, dr}{\sqrt{h^2 + r^2}},$$

und da

$$\int \frac{r\, dr}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \sqrt{h^2 + r^2},$$

$$V = \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sqrt{h^2 + a^2} - \sqrt{h^2}\right),$$

(2) $$V = 2\pi\varrho\left(\sqrt{h^2 + a^2} - h\right).$$

Lassen wir in diesem Ausdruck h immer kleiner und kleiner werden, so wird

(3) $$(V)_0 = 2\pi\varrho a.$$

Das Potential behält also auch dann einen endlichen Wert, wenn der Punkt P auf die belegte Scheibe rückt.

Zur Berechnung der Kraftwirkung bilden wir $-\frac{\partial V}{\partial h}$. Wir erhalten so die Kraft, mit der die Scheibe auf eine elektrostatische Einheit wirkt. Lassen wir dann h immer mehr abnehmen, so bekommen wir die Kraftwirkung in unmittelbarer Nähe der Scheibe. Es wird

$$\frac{\partial V}{\partial h} = 2\pi\varrho\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}} - 1\right),$$

also für $h = 0$, da dann der erste Ausdruck in der Klammer gleich Null wird,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{h=0} = -2\pi\varrho\,,$$

folglich

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{h=0} = +2\pi\varrho\,.$$

Die Kraft ist auch für eine unendlich nahe gebrachte elektrische Ladung von der Größe der elektrostatischen Einheit noch von endlichem Werte und zwar ist sie wegen des positiven Vorzeichens immer als Abstoßungskraft von der Scheibe fort gerichtet, d. h. sie ist oberhalb der Scheibe nach oben, unterhalb der Scheibe nach unten gerichtet. Im Augenblicke des Durchganges durch die Scheibe erfolgt ein sprungweiser Wechsel der Richtung. Rechnen wir die Kraftrichtung für oben und für unten beidemal nach derselben Richtung, so haben wir diese Änderung der Kraftrichtung durch einen Wechsel des Vorzeichens von h auszudrücken. Wir erhalten also

$$\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{h=+0} = -2\pi\varrho\,,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{h=-0} = +2\pi\varrho\,.$$

Die Differenz ergibt dann

$$\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{-0} = -4\pi\varrho\,.$$

Das ist aber dieselbe Gleichung, wie Gleichung (1).

Wir haben uns überzeugt, daß beim Durchtreten durch die geladene Oberfläche sowohl einer leitenden Kugel, wie einer leitenden kreisförmigen Platte eine plötzliche Unstetigkeit der Normalkraft um die Größe $-4\pi\varrho$ eintritt, allerdings nur für den Fall, daß die Flächendichte auf der Oberfläche konstant ist. Es läßt sich aber beweisen, daß auch für eine variable Flächendichte und bei beliebig geformter Fläche stets dieselbe Unstetigkeit von der Größe $-4\pi\varrho$ eintritt, wo dann ϱ die Flächendichte an der Stelle ist, wo man durch die Fläche hindurchgegangen ist. Wir haben nämlich gesehen, daß für den Fall der kreisförmigen Scheibe der Ausdruck $\frac{\partial V}{\partial h}$ eine vom Radius des Kreises unabhängige Größe ist. Wenn sich nun ϱ überall stetig ändert, so kann man um den Punkt, in dem man durch die Fläche hindurchgeht, ein so kleines kreisförmiges Gebiet abgrenzen, daß in diesem Gebiete ϱ als konstant und die Fläche selbst als eben angesehen werden kann. Für diese Fläche aber gilt der Satz

$$\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{-0} = -4\pi\varrho\,.$$

Die Unstetigkeit des Ausdruckes $\frac{\partial V}{\partial h}$ ist nur bedingt durch das Gebiet, durch welches man hindurchgeht. Die ferner liegenden Teile des Gebietes sind ohne Einfluß auf das Resultat. Daher kann man die angegebene Formel auf jede Fläche anwenden, wenn nur die Fläche selbst und ihre Belegung keine Unstetigkeit an der betreffenden Stelle hat.

Eine besonders wichtige Anwendung findet dieser Satz noch für die Oberfläche von leitenden Körpern, da hier stets die nach innen wirkende Kraft gleich Null ist, so daß für diese nur die nach außen wirkende Normalkraft $\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_{+0}$ übrig bleibt. Es ist demnach für die Oberfläche eines Leiters

$$-(K_n)_{+0} = \left(\frac{\partial V}{\partial_h}\right)_{+0} = -4\pi\varrho\,.$$

Kennt man die Größe dieser Kraft an einer bestimmten Stelle, also die Größe der Kraft, welche die gesamte

Ladung des Körpers auf eine an dem betrachteten Punkte vorhanden gedachte elektrostatische Einheit ausüben würde, so läßt sich die Flächendichte an dieser Stelle berechnen nach der Formel

$$\varrho = \frac{K_n}{4\pi}. \tag{4}$$

§ 53. Verteilung der Elektrizität auf einzeln stehenden Leitern.

Die Berechnung der Verteilung der Elektrizität auf einzeln stehenden Leitern ist nur für wenige Körper elementar ausführbar. Die Berechnung bietet für die meisten Körper große, oft unüberwindliche Schwierigkeiten.

Die allgemeine Lösung des Problems beruht auf der Lösung der partiellen Differentialgleichung $\Delta V = 0$ (siehe Gleichung 17, § 18), da das Innere des Leiters frei von elektrischer Ladung sein muß. Zu dieser Bedingung tritt noch die hinzu, daß die Oberfläche des Körpers eine Niveaufläche sein muß, denn die Kraftlinien müssen auf der Oberfläche senkrecht stehen, weil sonst noch eine Kraftkomponente in der Richtung der Oberfläche vorhanden wäre, welche eine Bewegung der Elektrizität auf der Oberfläche selbst hervorrufen würde. Die Lösung der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ bildet aber, wie schon früher erwähnt, das Hauptproblem der mathematischen Potentialtheorie.

Wir wollen uns hier nur befassen mit der Bestimmung der elektrischen Verteilung auf einem Ellipsoide und auf solchen Körpern, welche aus dem Ellipsoide abgeleitet werden können.

Verteilung der Elektrizität auf einem Ellipsoide:

Wir machen Gebrauch von dem in § 11 abgeleiteten Satze, daß im inneren Hohlraume eines Körpers, der von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden begrenzt ist, keine Kraftwirkung eintritt, wenn der Körper homogen mit Agens belegt ist.

Für unsere elektrostatischen Ladungen müssen wir nur bedenken, daß eine durch die ganze Masse eines Körpers geforderte homogene Belegung ersetzt werden muß durch

eine Flächenbewegung, da sich die Elektrizität nur auf der Oberfläche des Körpers ausbreitet.

Denken wir uns den Körper zwischen den beiden ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden unendlich dünn, aber die Agensverteilung doch noch der Forderung entsprechend ausgeführt, so bedeutet das, daß wir an jedem Punkte oder in jedem Flächenelement eine Agensmenge angesammelt annehmen müssen, welche der Dicke der zwischen den beiden Ellipsoiden liegenden Schicht proportional ist. Nennen wir die an allen Punkten nach unserer Forderung homogene räumliche Agensbelegung $\varkappa$ und die von Punkt zu Punkt wechselnde Dicke der Schicht ε, so muß in einem Körperelement, das die Oberfläche $d\sigma$ hat, die Agensmenge gleich $\varkappa \cdot \varepsilon \cdot d\sigma$ sein. Soll diese Agensmenge durch eine flächenhafte Elektrizitätsbelegung mit der Flächendichte ϱ ersetzt werden, so liegt auf demselben Flächenelement $d\sigma$ die Elektrizitätsmenge $\varrho \cdot d\sigma$, und es müssen die beiden Belegungen gleich sein, d. h.

$$\varrho \cdot d\sigma = \varkappa \cdot \varepsilon \cdot d\sigma$$

oder

$$\varrho = \varkappa \cdot \varepsilon \,. \tag{1}$$

Da $\varkappa$ nach unserer Voraussetzung konstant sein soll, so ergibt sich die schon mitgeteilte Beziehung, daß die Flächendichte ϱ der Dicke der Schicht zwischen zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden proportional sein muß, wenn im Innern des Ellipsoides keine Kraftwirkung auftreten soll.

Wir haben daher die Dicke der ellipsoidischen Schicht zu berechnen.

Es sei (Fig. 53) O der Mittelpunkt der beiden ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoide, von denen das kleinere Ellipsoid die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hat.

P sei ein Punkt dieses Ellipsoids mit den Koordinaten x, y, z. Wir legen im Punkte P an das Ellipsoid die Tangentialebene und errichten auf derselben in P das Lot bis zum Durchschnitt B mit dem äußeren Ellipsoide, an

welches wir dann ebenfalls die Tangentialebene legen. Wir ziehen $OP = r$ und verlängern OP bis zum Durchschnitt A mit der äußeren Tangentialebene. Ferner fällen wir $OC = p$ vom Mittelpunkte O senkrecht auf die Tangentialebenen. Das innere Ellipsoid hat die drei Achsen a, b, c. Das

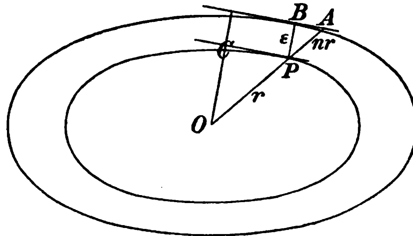


Fig. 53.

äußere möge die Achsen $a + na$, $b + nb$, $c + nc$ haben, so ist $PA = nr$. Ferner ist $PB = \varepsilon$ die Dicke der Schicht am Punkte P.

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke PAB und OPC folgt die Proportion

$$\varepsilon : nr = p : r\,,$$

also hieraus

$$\varepsilon = np\,.$$

p ist das Lot, das vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf die Tangentialebene gefällt ist. Die Länge desselben ist nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

also wird

(2) $$\varepsilon = \frac{n}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Wenn nun die ganze Agensmenge, die den Raum zwischen den beiden Ellipsoiden erfüllt, Q ist, so berechnen

wir dieselbe aus dem Volumen der ellipsoidischen Schale und der konstanten Raumdichte $\varkappa$.

Das Volumen des inneren Ellipsoids ist

$$R_1 = \tfrac{4}{3}\pi abc\,,$$

das des äußeren gleich

$$\begin{aligned} R_2 &= \tfrac{4}{3}\pi(a + na)(b + nb)(c + nc) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi abc(1 + n)^3 \\ &= \tfrac{4}{3}\pi abc(1 + 3n + 3n^2 + n^3)\,. \end{aligned}$$

Bedenken wir, daß die Schale sehr dünn im Vergleich zur Größe der Achsen sein soll, so ist n eine sehr kleine Zahl, so daß wir berechtigt sind, die höheren Potenzen von n zu vernachlässigen. Wir erhalten also

$$R_2 = \tfrac{4}{3}\pi abc(1 + 3n)\,.$$

Das Volumen R der Schale ist gleich der Differenz der Volumina des äußeren und des inneren Ellipsoids, also $R = R_2 - R_1$, folglich ist

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{4}{3}\pi abc(1 + 3n) - \tfrac{4}{3}\pi abc \\ &= 4\pi abc \cdot n\,. \end{aligned}$$

Die Volumendichte des Agens ist $\varkappa$, also ist die Agensmenge

$$Q = R \cdot \varkappa = 4\pi abc n\varkappa\,.$$

Ersetzen wir jetzt die Agensmenge durch die Elektrizitätsmenge e und ebenso die Raumdichte $\varkappa$ des Agens nach Gleichung (1) durch den Ausdruck $\varkappa = \frac{\varrho}{\varepsilon}$, wo ϱ gleich der Flächendichte der elektrischen Ladung ist, so wird

$$e = 4\pi abc \cdot n \cdot \frac{\varrho}{\varepsilon}\,.$$

Hieraus folgt

$$\varrho = \frac{e \cdot \varepsilon}{4\pi abc \cdot n}\,.$$

In diesen Ausdruck setzen wir endlich noch den Wert für ε aus Gleichung (2) ein und erhalten

$$\varrho = \frac{e}{4\pi abc \cdot n} \cdot \frac{n}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

und da sich n forthebt, endlich

$$\varrho = \frac{e}{4\pi abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \tag{3}$$

als Ausdruck für die elektrische Flächendichte im Punkte P des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Im besonderen interessiert uns noch die Dichte in den Endpunkten der Achsen des Ellipsoids. Für den Endpunkt der Achse a ist zu setzen

$$x = a , \quad y = 0 , \quad z = 0 ,$$

also wird

$$\varrho_a = \frac{e}{4\pi abc} \cdot a ,$$

ebenso wird

$$\varrho_b = \frac{e}{4\pi abc} \cdot b ,$$

$$\varrho_c = \frac{e}{4\pi abc} \cdot c .$$

Die Ladungsdichte in den Endpunkten der Achsen eines Ellipsoids ist also den Längen der Achsen direkt proportional.

Verteilung der Ladung auf einem Rotationsellipsoid:

Wir haben in Gleichung (3) für ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse a sein möge, nur $b = c$ zu setzen und erhalten

$$\varrho = \frac{e}{4\pi a b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2 + z^2}{b^4}}}.$$

In einem Rotationsellipsoide sind alle senkrecht zur Rotationsachse gelegten Schnitte Kreise. Die Rotationsachse fällt hier mit der x-Achse zusammen. Nennen wir einen Radius eines solchen Kreisschnittes r, so wird $y^2 + z^2 = r^2$, also nimmt der Ausdruck für ϱ die Form an

$$\varrho = \frac{e}{4\pi a b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{r^2}{b^4}}}.$$

Bedenken wir noch, daß ein längs der Rotationsachse geführter Schnitt das Ellipsoid in einer Ellipse mit den Halbachsen a und b schneidet, und daß die Gleichung dieser Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{r^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

bzw.

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{r^2}{b^2},$$

so können wir noch in der Formel für ϱ entweder x oder r fortschaffen. So erhalten wir entweder

$$\varrho = \frac{e}{4\pi a b^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{a^2 - x^2}{a^2 b^2}}},$$

also umgeformt

$$\varrho = \frac{e}{4\pi b} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2}} \tag{4}$$

oder

$$\varrho = \frac{e}{4\pi a b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2 - r^2}{a^2 b^2} + \frac{r^2}{b^4}}},$$

also umgeformt

$$\varrho = \frac{e}{4\pi b} \frac{1}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot r^2}}. \tag{5}$$

Verteilung auf einem dünnen Draht:

Ein dünner Draht kann dargestellt werden als ein verlängertes Rotationsellipsoid, bei dem die Achse, welche nicht Rotationsachse ist, zu einer sehr geringen Größe zusammenschrumpft.

Wenden wir zur Berechnung der elektrischen Dichte auf einem solchen Draht, der die Länge a und den im Vergleich zu a geringen Querschnittsradius b hat, die Formel (4) an, also

$$\varrho = \frac{e}{4\pi b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2}},$$

so können wir hier unter der Wurzel b^2 gegen a^2 vernachlässigen. Wir erhalten

$$\varrho = \frac{e}{4\pi b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{6}$$

Aus dieser Formel ersehen wir, daß die elektrische Flächendichte für $x = 0$, also für die Mitte des Drahtes den geringsten Wert hat, daß aber mit wachsendem x der Wert erst langsam, dann immer rascher zunimmt und für $x = a$, also für die Enden des Drahtes den Wert unendlich annehmen würde. Das hat seinen Grund darin, daß unter der gemachten Annahme die Enden zu außerordentlich feinen

Spitzen auslaufen würden, in denen, wie wir schon früher sahen, die Dichte außerordentlich groß wird. Trotzdem ist die an den Enden aufgestaute Elektrizitätsmenge auch dann, wenn wirklich solche ideale Spitzen vorhanden wären, nicht unendlich groß, da nämlich das dort mit unendlicher Dichte geladene Flächenstück selbst unendlich klein ist. Praktisch wird man niemals vollkommene Spitzen an den Drahtenden haben, sondern es bilden sich immer Abstumpfungen der Spitze aus. Sollte aber eine Spitze am Drahtende der idealen Spitze nahekommen, so erfolgt an derselben ein Ausströmen der Elektrizität. Daraus ergibt sich, daß die gesamte Aufnahmefähigkeit eines zugespitzten dünnen Drahtes außerordentlich gering ist.

Daß, wie sich aus Gleichung (6) ergibt, die elektrische Dichte um so größer wird bei gegebener Gesamtladung e, je dünner der Draht, also je kleiner b ist, erscheint deshalb selbstverständlich, weil die Gesamtoberfläche mit Verminderung der Drahtdicke im quadratischen Verhältnis mit dieser abnimmt.

Können wir andererseits annehmen, daß das Rotationsellipsoid unendlich lang ist, so geht dasselbe in einen Kreiszylinder von dem Querschnittsradius b und der im Vergleich zu x sehr großen Länge a über. Dann können wir in der Formel (6) unter dem Wurzelzeichen die Größe x vollständig gegen a vernachlässigen. Es wird

(6a) $$\varrho = \frac{e}{4\pi a b}.$$

Die Flächendichte ist auf dem Zylinder konstant. Dieses trifft immer für die Gegend der Mitte des Zylinders zu. Die Dichte der Elektrizität ist so groß, als ob die ganze Ladung auf dem Zylinder gleichmäßig verteilt wäre.

Verteilung auf einer kreisförmigen Platte.

Die kreisförmige Platte können wir aus einem verkürzten Rotationsellipsoid ableiten, dessen Rotationsachse verschwindend klein wird. Wir benutzen zur Berechnung die Formel (5), welche lautete

$$\varrho = \frac{e}{4\pi b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot r^2}}.$$

Wir setzen hier $a = 0$ und erhalten

$$(7) \qquad \varrho = \frac{e}{4\pi b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 - r^2}}.$$

Diese Formel hat mit der Gleichung (6) eine auffallende Ähnlichkeit. Die aus derselben zu ziehenden Schlüsse sind daher auch den vorigen ähnlich. Die Ladungsdichte ϱ ist in der Mitte der Platte am geringsten, weil hier $r = 0$ ist, sie wächst mit wachsendem r erst langsam, dann immer rascher und erreicht für $r = b$, also für den Plattenrand, den Wert unendlich. Auch hier läßt sich wieder schließen, daß dem unendlichen Wert für ϱ keine unendlich große Ladungsmenge am Rande entspricht, weil bei unserer Ableitung der kreisförmigen Platte aus dem Rotationsellipsoid sich für den Rand ein vollkommen messerscharfer Rand ergeben würde, der wegen seiner verschwindend geringen Flächengröße trotz unendlicher Ladungsdichte nur einen endlichen Betrag der Elektrizitätsmenge enthält. Hiervon abgesehen, ist in der Praxis ein solcher ideal messerscharfer Rand bei einer Platte niemals vorhanden.

Die Ladungsdichte einer kreisförmigen Platte können wir uns durch eine einfache Konstruktion veranschaulichen.

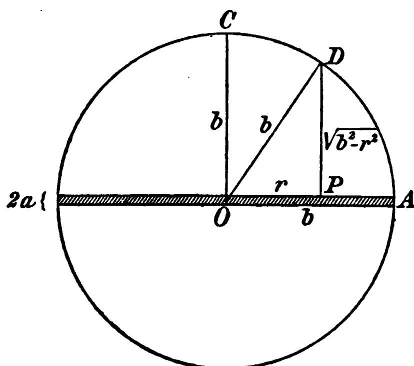


Fig. 54.

In Figur 54 stelle der schraffierte Teil die geladene Platte vor. Es sei O der Mittelpunkt der Platte. Der Radius der Platte sei b und die Dicke derselben sei $2a$.

Wir konstruieren um den Mittelpunkt O mit dem Radius b eine leitende Kugel, welche also die Platte am Rande berührt. Ferner errichten wir in der Mitte O und im beliebigen Punkte P der Platte die Lote $OC = b$ und $PD = h$. Dann verbinden wir noch O mit D. Es ist auch $OD = b$. Das rechtwinklige Dreieck OPD liefert die Beziehung $OD^2 = OP^2 + PD^2$, woraus sich ergibt

$$PD = h = \sqrt{b^2 - r^2}.$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (7) ein, so erhalten wir

$$(8) \qquad \varrho = \frac{e}{4\pi b} \cdot \frac{1}{h}.$$

Denken wir uns nun die Ladung e auf die Oberfläche der Kugel gebracht, so findet hier eine gleichmäßige Verteilung der Ladung statt. Es sei die dann auf der Kugel herrschende Flächendichte gleich ϱ'. Dann beträgt also die Gesamtladung

$$e = 4\pi b^2 \cdot \varrho'.$$

Diesen Wert setzen wir in Gleichung (8) ein und erhalten

$$\varrho = \frac{4\pi b^2 \varrho'}{4\pi b} \cdot \frac{1}{h},$$

$$(9) \qquad \varrho = \frac{b}{h} \varrho'.$$

Für den Mittelpunkt O wird $h = b$, also auch $\varrho = \varrho'$. Wir können daher dem Inhalt der Gleichung (9) folgenden Wortlaut geben: Wenn eine kreisförmige Platte elektrisch geladen wird, so ist die Ladungsdichte im Mittelpunkte derselben gleich der Ladungsdichte, die eine Kugel von demselben Radius haben würde, wenn auf ihr dieselbe Ladung gleichmäßig verteilt wäre. Die Ladungsdichte in einem anderen Punkte der Platte ist umgekehrt proportional dem Lote, das in diesem Punkte auf der Platte bis zur Oberfläche der umschriebenen Kugel konstruiert ist.

§ 54. Das Potential und die Kapazität einer elektrisch geladenen kreisförmigen Platte.

Diese Aufgabe unterscheidet sich von der schon in § 52 behandelten Aufgabe dadurch, daß dort die Ladung der Platte an allen Stellen dieselbe Dichte hatte, während hier die durch die elektrische Ladung bedingte veränderliche Dichte, welche nach § 53 Gleichung 7 durch

$$\varrho = \frac{e}{4\pi b} \frac{1}{\sqrt{b^2 - r^2}}$$

bestimmt ist, an allen Stellen der Platte herrschen soll. Wir errichten in der Mitte O der Platte mit dem Radius b das Lot (Fig. 55), auf welchem wir den Punkt P so an-

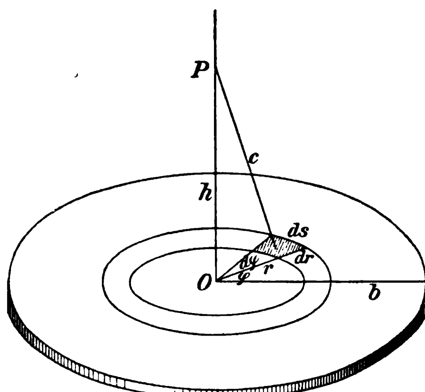


Fig. 55.

nehmen, daß $OP = h$ ist. Ferner ziehen wir in der Plattenebene die beiden Radien, welche mit einer gewissen Anfangslage den Winkel φ und $\varphi + d\varphi$ einschließen, und konstruieren zwei Kreise mit den Radien r und $r + dr$. Dann ist das Flächenelement bestimmt durch $ds = r\,dr\,d\varphi$, und da die Ladungsdichte hier ϱ ist, so ist die an der Stelle vorhandene Ladungsmenge gleich $\varrho \cdot r\,dr\,d\varphi$. Diese Ladungsmenge hat vom Punkte P, dessen Potential bestimmt werden soll, die Entfernung $c = \sqrt{h^2 + r^2}$. Nun müssen wir bei der Bildung des Potentials noch bedenken, daß die Platte zwei einander unendlich nahe Flächen hat, auf deren jeder die Ladung

durch ϱ bestimmt ist. Deshalb kommt für das von dem Flächenelemente ds herrührende Potential der Ausdruck

$$dV = \frac{2\varrho \cdot r\,dr\,d\varphi}{c}$$

in Betracht.

Wir setzen die Werte für ϱ und c ein und bekommen

$$dV = \frac{2 \cdot \dfrac{e}{4\pi b}\,\dfrac{1}{\sqrt{b^2 - r^2}} \cdot r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{h^2 + r^2}},$$

oder vereinfacht

$$dV = \frac{e}{2\pi b}\,\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{b^2 - r^2}\,\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Das Gesamtpotential erhalten wir, indem wir zweimal integrieren und zwar für r zwischen den Grenzen 0 und b und für φ zwischen den Grenzen 0 und 2π, folglich ist

$$V = \frac{e}{2\pi b}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b \frac{r\,dr}{\sqrt{b^2 - r^2}\,\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Die Integration nach φ läßt sich sofort ausführen

$$V = \frac{e}{b}\int_0^b \frac{r\,dr}{\sqrt{b^2 - r^2}\,\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Die unbestimmte Integration des Integranden geschieht in der Weise, daß man erst für r^2 die neue Variable z einführt und dann das so entstehende Integral auf einen arcsin zurückführt.

$$\int \frac{r\,dr}{\sqrt{b^2 - r^2}\,\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(r^2)}{\sqrt{(b^2 - r^2)(h^2 + r^2)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{b^2 h^2 - (b^2 - h^2)z - z^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\left[\frac{z - \dfrac{b^2 - h^2}{2}}{\dfrac{b^2 + h^2}{2}}\right] = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2r^2 - (b^2 - h^2)}{b^2 + h^2}\right).$$

Es wird daher

$$V = \frac{e}{2b}\left[\arcsin\left(\frac{2b^2 - b^2 + h^2}{b^2 + h^2}\right) + \arcsin\left(\frac{b^2 - h^2}{b^2 + h^2}\right)\right]$$

$$= \frac{e}{2b}\left[\arcsin 1 + \arcsin\left(\frac{b^2 - h^2}{b^2 + h^2}\right)\right],$$

(1) $$V = \frac{e}{2b}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{b^2 - h^2}{b^2 + h^2}\right)\right].$$

Um nun das Potential auf der Platte selbst zu haben, lassen wir h immer kleiner werden. Wir setzen $h = 0$ und erhalten

$$V_0 = \frac{e}{2b}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right),$$

also

(2) $$V_0 = \frac{e\pi}{2b}.$$

Dieses ist das Potential der kreisförmigen Platte in der Mitte. Wir wissen aber, daß das Potential auf der ganzen Platte konstant ist, folglich ist dieses auch der Ausdruck für das Potential jedes Punktes der Oberfläche.

Nach Kenntnis des Potentials ergibt sich auch sofort die Berechnung der Kapazität der Platte, denn es sind allgemein die Kapazität C, die Ladungsmenge e und das Potential V nach § 47 verbunden durch die Gleichung

$$C = \frac{e}{V}.$$

Daraus folgt also hier für die Kapazität der kreisförmigen Platte mit dem Radius b

(3) $$C = \frac{2b}{\pi}.$$

§ 55. Verteilung der Influenzelektrizität auf einer leitenden Kugel, die sich im Felde einer punktförmigen Ladung befindet.

Der Punkt A (Fig. 56) sei der Träger einer elektrischen Ladung $+e$. Im Kraftfelde dieser Ladung befinde sich die leitende Kugel mit dem Mittelpunkte C und

dem Radius a in einer Mittelpunktsentfernung r. Es soll die elektrische Dichte ϱ im Punkte P bestimmt werden, welcher von A den Abstand $AP = r_1$ hat, wenn die Kugel zur Erde abgeleitet ist, also das Potential Null hat.

Die Berechnung der Dichte der Influenzelektrizität im Punkte P ist deshalb schwierig, weil außer der gegebenen

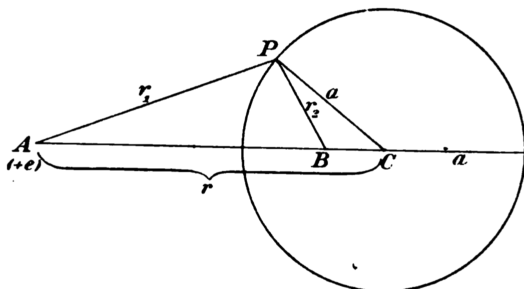


Fig. 56.

Ladung $+e$ des gegebenen Punktes A auch noch die Influenzladungen, die auf den übrigen Punkten der Kugel durch den influenzierenden Einfluß der Ladung $+e$ entstehen, auf die Ladung des Punktes P einwirken.

Trotzdem gelingt uns die Lösung durch Benutzung zweier früher abgeleiteten Sätze. Nach § 52, Gleichung (2) ist die Dichte der Ladung an einem Punkte der Oberfläche eines Leiters bekannt, wenn man die Normalkraft in diesem Punkte kennt; es ist nach dieser Gleichung

$$\varrho = \frac{K_n}{4\pi}.$$

Wir suchen daher, um die Dichte der Ladung in P zu finden, vorerst die Kraft, welche alle Ladungen des gesamten elektrischen Systems auf den Punkt P hervorrufen. Das elektrische System besteht aus der Ladung $+e$ des Punktes A und aus der Influenzladung der Kugel. Nun wissen wir aber ferner, daß wir nach § 50, wo wir den Begriff des elektrischen Bildes einführten, die gesamte Influenzladung der Kugel ersetzen können durch eine nega-

tive Ladung, welche im Punkte B innerhalb der Kugel so angebracht ist, daß erstens die Größe dieser Ladung

$$e' = \frac{a}{r} \cdot e$$

ist, und daß zweitens

$$BC = \frac{a^2}{r}$$

ist. Wir bestimmen also die durch die Ladung $+e$ in A und durch die Ladung $-\frac{a}{r}e$ in B hervorgebrachte Normalkraft in P.

Die Ladung $+e$ in A wirkt auf die in P gedachte Einheit der Elektrizitätsmenge mit der Kraft

$$+\frac{e}{r_1^2},$$

die Ladung $-\frac{a}{r}e$ in B wirkt mit der Kraft

$$-\frac{a}{r}\frac{e}{r_2^2}.$$

Die erste Kraft wirkt in der Richtung AP, die zweite in der Richtung BP. Wir zerlegen jede der beiden Kräfte nach dem Parallelogrammgesetz in zwei Komponenten, von denen die eine in der Richtung des Radius CP, die andere in der Richtung der Achse CA wirkt.

Die Zerlegung der ersten Kraft ergibt folgende Komponenten:

In der Richtung CP

$$-\frac{e}{r_1^2} \cdot \frac{a}{r_1} = -\frac{ea}{r_1^3}$$

und in der Richtung AC

$$+\frac{e}{r_1^2} \cdot \frac{r}{r_1} = +\frac{er}{r_1^3}.$$

Die Zerlegung der zweiten Kraft ergibt die Komponenten:

In der Richtung CP

$$+\frac{a}{r}\cdot\frac{e}{r_2^2}\cdot\frac{a}{r_2}=+\frac{ea^2}{r r_2^3}$$

und in der Richtung AC

$$-\frac{a}{r}\cdot\frac{e}{r_2^2}\cdot\frac{BC}{r_2}=-\frac{e\cdot a\cdot BC}{r r_2^3}\,.$$

Diese beiden Komponenten formen wir noch um, indem wir nach § 50 schreiben

$$BC=\frac{a^2}{r}\quad\text{und}\quad r_2=\frac{a r_1}{r}\,.$$

Wir erhalten so als Komponenten der zweiten Kraft:

In der Richtung CP

$$+\frac{ea^2}{r}\cdot\frac{r^3}{a^3 r_1^3}=+\frac{e r^2}{a r_1^3}$$

und in der Richtung AC

$$-\frac{e\cdot a}{r}\cdot\frac{a^2}{r}\cdot\frac{r^3}{a^3 r_1^3}=-\frac{e r}{r_1^3}\,.$$

Wir schreiben die Komponenten der beiden Kräfte noch einmal übersichtllch zusammen:

	I	II
In der Richtung CP	$+\frac{ea}{r_1^3}$	$-\frac{e r^2}{a r_1^3}$
in der Richtung AC	$+\frac{e r}{r_1^3}$	$-\frac{e r}{r_1^3}$

Jetzt können wir die einzelnen Komponenten addieren. Da erkennen wir, daß die in der Richtung AC fallenden Komponenten entgegengesetzt gleich sind, sich also fortheben. Es bleiben nur die Komponenten in der Richtung CP übrig. Die Summe derselben ist aber die Normalkraft

$$K_n=+\frac{ea}{r_1^3}-\frac{e r^2}{a r_1^3}\,,$$

$$K_n=-\frac{e}{r_1^3}\cdot\frac{r^2-a^2}{a}\,.$$

Mit Hilfe dieser Normalkraft erhalten wir den Wert der elektrischen Dichte im Punkte P, indem wir K_n durch 4π dividieren und kommen zu dem Resultat

$$\varrho = -\frac{e}{4\pi}\frac{r^2 - a^2}{a r_1^3}.$$

Hieraus folgt, daß die elektrische Dichte der Influenzladung einer zur Erde abgeleiteten Kugel im Felde einer punktförmigen Elektrizitätsmenge der dritten Potenz des Abstandes des untersuchten Punktes von der influenzierenden Ladung umgekehrt proportional ist.

Die gesamte durch Influenz auf der Kugel erzeugte Elektrizitätsmenge muß aber gleich der Ladung des elektrischen Bildes sein, also ist die Ladung der Kugel

$$e' = \frac{a}{r} \cdot e,$$

sie ist der Größe der influenzierenden Ladung und dem Radius der Kugel, also ihrer Kapazität direkt, der Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der influenzierenden Ladung umgekehrt proportional.

§ 56. Prinzip der Kondensatoren.

Wenn wir in den Innenraum eines allseitig geschlossenen leitenden Hohlkörpers eine Ladung e einführen, so wissen wir nach § 45, daß dadurch die Oberfläche des Leiters ein Potential annimmt, das vollkommen unabhängig von der Lage der eingeführten Ladung im Hohlraum ist. Da eine elektrische Ladung stets in einem benachbarten Leiter eine Influenzladung hervorruft, so hat hier die Innenwandung, wie auch die Außenwandung des Leiters eine Influenzladung erfahren, und zwar wird bei eingeführter positiver Ladung $+e$ auf der Innenseite eine negative Ladung $-e'$ und auf der Außenseite ein ebenso große positive Ladung $+e'$ auftreten. Die Verteilung dieser Ladung wird von der Lage der eingeführten Ladung $+e$ abhängen und zwar so, daß diejenigen Teile der Innenwandung, die der Ladung $+e$ nahe liegen, eine stärkere negative Ladung erfahren, als die entfernt liegenden, ebenso wird auch die Verteilung der Ladung auf der Außenseite,

also die elektrische Flächendichte von der Form der Außenfläche abhängig sein. Trotzdem muß das Potential auf allen Teilen des Hohlkörpers gleich sein, wenn der Gleichgewichtszustand eingetreten ist; doch wird es abweichen von dem Potential des Körpers, mittels dessen die Ladung $+e$ eingeführt ist.

Wir wissen ferner nach § 45, daß das Potential der Oberfläche des Hohlkörpers auch dann noch unverändert bleibt, wenn man den die Ladung $+e$ tragenden Körper mit der Innenwandung in leitende Berührung bringt. Da aber beim Herausziehen des Körpers nach der Berührung sich derselbe als vollkommen unelektrisch erweist, und da andrerseits jetzt auch die gesamte Innenwandung des Hohlkörpers unelektrisch ist, so muß sich die Ladung $+e$ mit der im Anfange auf der Innenwandung vorhandenen Ladung $-e'$ ausgeglichen haben, so daß also

$$+e - e' = 0$$

ist, d. h. also die Größe der auf der Innenwandung influenzierten Ladung ist gleich der Größe der eingeführten Ladung $+e$.

Hieraus folgt nun ferner, daß auch die auf der Außenwandung befindliche positive Influenzladung $+e'$ genau an Größe und an Vorzeichen der eingeführten Ladung $+e$ gleich sein muß.

Die Berechnung der Verteilung der Elektrizität und des Potentials gestaltet sich im allgemeinen sehr schwierig, doch läßt sich schon allgemein vermuten, daß das Potential des die Ladung $+e$ tragenden Körpers beim Einführen in den Hohlkörper vermindert wird.

Wir können sogar behaupten, daß das Potential eines elektrisch geladenen Körpers stets vermindert wird, wenn wir ihm einen anderen unelektrischen, isolierten Körper nähern. Wir wollen zu dem Zwecke annehmen, der mit der Ladung $+e$ geladene Körper P sei eine Kugel und sein Potential sei V. Bringen wir einen anderen leitenden Körper K (Fig. 57) in die Nähe, so entsteht auf der zugewandten Seite des Körpers K eine negative, auf der abgewandten Seite eine positive Influenzladung, welche ebenfalls ein Potential auf P hervorrufen. Eins der negativen Ladungselemente sei $-de'$ und sein Abstand vom

Mittelpunkte der Kugel sei r', so ist das durch dieses Element auf der Kugel erzeugte Potential $\frac{-de'}{r'}$, folglich ist das von der gesamten negativen Influenzladung herrüh-

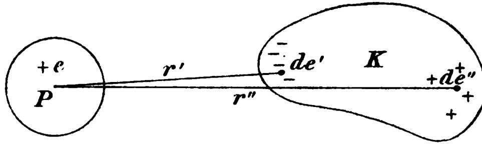


Fig. 57.

rende Potential $\int\frac{-de'}{r'}$. In derselben Weise ergibt sich für das Potential, das die positive Influenzladung des Körpers K auf der Kugel P hervorruft, der Wert $\int\frac{+de''}{r''}$, wenn wieder ein Ladungselement $+de''$ und sein Abstand vom Kugelmittelpunkte r'' ist. Folglich ist jetzt das Gesamtpotential der Kugel P

$$V' = V - \int\frac{de'}{r'} + \int\frac{de''}{r''}\,.$$

Nun ist zu beachten, daß alle Werte r'' größer sind als die Werte r', während die Summe aller Elemente de' gleich ist der Summe aller Elemente de'', folglich muß das Integral $\int\frac{de'}{r'}$ dem absoluten Werte nach größer sein als das Integral $\int\frac{de''}{r''}$. Hieraus folgt dann, daß $-\int\frac{de'}{r'} + \int\frac{de''}{r''}$ eine negative Summe ergibt, woraus dann weiter folgt, daß

$$V' < V.$$

Es nimmt also das Potential der Kugel P durch Annäherung eines isolierten leitenden Körpers K ab.

Wenn wir den Körper K leitend mit der Erde verbinden, so geht die positive Influenzladung zur Erde ab, und es bleibt nur eine negative Influenzladung übrig. Es

wird daher der nun auf der Kugel P herrschende Potentialwert nur noch sein

$$V'' = V - \int \frac{de'}{r'}.$$

Daraus folgt, da jetzt das zweite Integral von vorhin, das noch einen positiven Wert hatte, verschwunden ist, daß das Potential der Kugel bei Ableitung des Körpers K zur Erde noch weiter abnimmt.

Wir können dies mit jedem gewöhnlichen Blättchen-Elektroskop beobachten. Nähern wir dem geladenen Elektroskop einen isolierten unelektrischen Körper, so nimmt bei Annäherung desselben die Divergenz der Blättchen ab. Berühren wir dann den angenäherten Körper, verbinden ihn also mit der Erde, so tritt eine weitere Abnahme der Divergenz ein.

Das Potential eines elektrischen Körpers wird durch Annäherung eines anderen leitenden Körpers vermindert, und bei Ableitung des genäherten Körpers zur Erde tritt eine weitere Verminderung des Potentials ein.

Wollen wir das Potential des Körpers wieder auf seinen ursprünglichen Betrag erhöhen, so müssen wir dem Körper eine weitere Elektrizitätsmenge zuführen.

Daraus folgt, daß die Kapazität eines Leiters durch Annäherung eines anderen leitenden Körpers erhöht wird, und daß eine weitere Erhöhung der Kapazität eintritt, wenn der angenäherte Körper zur Erde abgeleitet wird.

Wir sind daher imstande, einen Leiter herzustellen, der eine große Kapazität besitzt, indem wir einen anderen mit der Erde verbundenen Leiter in seine Nähe bringen.

Vorrichtungen, bei denen dieses Prinzip ausgeführt ist, die sich also besonders dazu eignen, große Elektrizitätsmengen bei kleinem Potential aufzunehmen, führen den Namen Ansammlungsapparate oder Kondensatoren.

Wir wollen in den folgenden beiden Paragraphen nur den Kugelkondensator und den Plattenkondensator eingehend behandeln.

§ 57. Der Kugelkondensator.

In Figur 58 sei ein Kugelkondensator abgebildet. Derselbe besteht aus einer Kugel mit dem Mittelpunkte C und dem Radius r und einer von konzentrischen Kugeln begrenzten Hohlkugel mit dem inneren Radius r_1 und dem

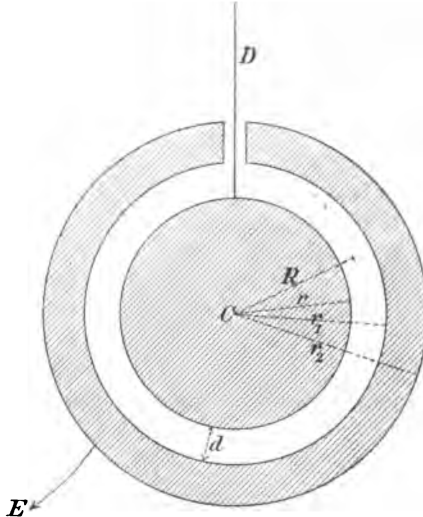


Fig. 58.

äußeren Radius r_2. Die Kugel mit dem Radius r sei von der äußeren Hohlkugel durch einen Luftzwischenraum getrennt und isoliert. Ein dünner Draht D führt durch eine kleine Öffnung isoliert durch die Hohlkugel hindurch und ist leitend mit der inneren Kugel verbunden, doch sei die Öffnung so klein, daß sie für die Berechnung gar nicht in Betracht kommt, so daß wir die Hohlkugel als allseitig geschlossen betrachten dürfen. Die angedeutete Erdverbindung E sei vorläufig noch nicht vorhanden.

Wir können der inneren Kugel durch den Draht D eine gewisse Elektrizitätsmenge $+e$ zuführen. Denken wir uns diese Kugel ohne die umschließende Hohlkugel, so

würde die Elektrizitätsmenge $+e$ auf der inneren Kugel mit dem Radius r das Potential

$$V = \frac{e}{r} \tag{1}$$

hervorrufen.

Durch Influenz wird nun auf der Hohlkugel eine negative Ladung auf der Innenseite und eine positive Ladung auf der Außenseite erzeugt, deren absoluter Betrag gleich dem von $+e$ ist. Jede dieser Ladungen erzeugt auf der inneren Kugel wieder ein Potential und zwar

$$V_1 = -\frac{e}{r_1} \quad \text{und} \quad V_2 = +\frac{e}{r_2} \,.$$

Es ist das gesamte Oberflächenpotential der inneren Kugel gleich

$$V' = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_1} + \frac{e}{r_2} \,,$$

$$V' = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) , \tag{2}$$

wofür wir auch schreiben können mit Benutzung von Gleichung (1)

$$V' = V - e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = V - \frac{e\,(r_2 - r_1)}{r_1\, r_2} \,.$$

Da $r_2 - r_1$ positiv ist, so erkennen wir, daß durch die Umhüllung der ursprünglichen Kugel mit der äußeren Hohlkugel eine Erniedrigung des Potentialwertes eingetreten ist. Diese Erniedrigung ist der Differenz $r_2 - r_1$, also der Dicke der Hohlkugel direkt proportional.

Jetzt wollen wir die äußere Hohlkugel zur Erde leitend ableiten. Dadurch wird die positive Influenzladung beseitigt, und wir erhalten

$$V'' = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) . \tag{3}$$

Dieser Potentialwert ist von dem äußeren Radius der Hohlkugel ganz unabhängig. Wir geben dem Ausdrucke für V'' die Form $V'' = e \cdot \frac{r_1 - r}{r r_1}$. Setzen wir nun noch die

Dicke der isolierenden Luftschicht $r_1 - r = d$ und führen wir den mittleren Radius der isolierenden Schicht $R = \frac{r + r_1}{2}$ ein, so wird

$$(4) \qquad V'' = \frac{e\,d}{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\,.$$

Für den besonderen Fall, daß die Dicke der isolierenden Luftschicht klein ist im Verhältnis zum Radius der Kugeln, also auch zu R, können wir d^2 gegen R^2 im Nenner völlig vernachlässigen und erhalten die einfachere Formel

$$(5) \qquad V'' = \frac{e \cdot d}{R^2}\,.$$

Wir vergleichen den ursprünglichen Wert des Potentials der Innenkugel ohne die umgebende Hohlkugel (Gleichung 1) mit dem jetzt erhaltenen Potential. Unter der Voraussetzung, daß die isolierende Luftschicht sehr dünn ist, können wir in Gleichung (5) statt R auch r einsetzen und bekommen demnach

$$V = \frac{e}{r}\,,$$

$$(6) \qquad V'' = \frac{e\,d}{r^2}\,.$$

Hieraus folgt

$$\frac{V''}{V} = \frac{d}{r}\,.$$

Das Potential hat also abgenommen in dem Verhältnis, in dem die Dicke der isolierenden Schicht zum Radius der Kugel steht. Statt des Verhältnisses der Potentiale können wir auch das reziproke Verhältnis der Kapazitäten setzen, folglich ist

$$\frac{C''}{C} = \frac{r}{d}\,, \quad \text{oder} \quad C'' = \frac{r}{d} \cdot C\,.$$

Wir erkennen, daß die Kapazität des Kugelkondensators um den Faktor $\frac{r}{d}$ größer ist, als die Kapazität der ursprüng-

lichen Kugel. Diesen Faktor bezeichnet man mit dem Namen „Verstärkungszahl" eines Kondensators. Nennen wir denselben n, so wird

$$n = \frac{r}{d}. \tag{7}$$

Die Verstärkungszahl des Kugelkondensators ist dem Radius der Kugel direkt, der Dicke der isolierenden Luftschicht umgekehrt proportional. Die Kapazität C'' des Kugelkondensators mit zur Erde abgeleiteter äußerer Hülle können wir aus Gleichung (6) direkt bestimmen. Es ist allgemein

$$e = C \cdot V \quad \text{oder} \quad C = \frac{e}{V},$$

also auch hier

$$C'' = \frac{e}{V''} = \frac{r^2}{d}, \tag{8}$$

welchem Ausdrucke wir auch noch eine andere Form geben können, wenn wir die Oberfläche $O = 4\pi r^2$ einführen.

Dann wird

$$C'' = \frac{O}{4\pi d}. \tag{9}$$

Das Potential V_i im Zwischenraum zwischen der inneren Kugel und der äußeren Hülle bestimmt sich auf folgende Weise: Die beiden Kreise in Figur 59 bedeuten die innere Kugel und die zur Erde abgeleitete Hohlkugel, von welch letzterer nur die innere Fläche gezeichnet ist, da ja die äußere Fläche ohne Einfluß ist. Der Radius der inneren Kugel ist r und die Dicke der isolierten Luftschicht d. Der Punkt P liegt im Zwischenraum und zwar von der Oberfläche der inneren Kugel um die Strecke h entfernt. Das Potential von P setzt sich aus dem von der Ladung $+e$ auf der Kugel und dem von der Ladung $-e$ auf der Hülle herrührenden Potential zusammen, folglich ist

$$V_i = \frac{e}{r+h} - \frac{e}{r+d},$$

$$= \frac{d-h}{(r+h)(r+d)},$$

und da bei dünner Schicht sowohl h, als auch d gegen r vernachlässigt werden können, folgt

$$V_i = e \cdot \frac{d - h}{r^2} .$$

Führen wir wieder die Flächendichte ϱ ein, so ist

$$e = 4 \pi r^2 \varrho ,$$

also

(10) $V^i = 4 \pi \varrho (d - h)$.

Wir erkennen hieraus, daß in dem ganzen Zwischenraum zwischen den beiden Kugelflächen das Potential gleichmäßig von dem Werte $V = 4 \pi \varrho d$ bis $V = 0$ abnimmt. Natürlich gilt diese Beziehung nur so lange als d gegen r klein oder umgekehrt als r gegen d groß ist. Wächst r immer mehr und mehr, so ist die Gleichung (10) um so mehr berechtigt.

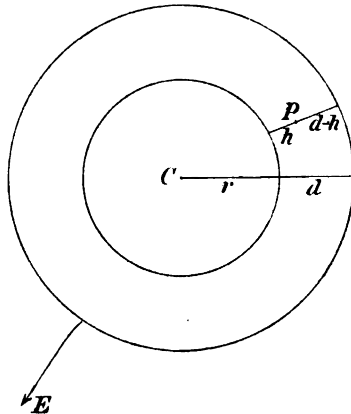


Fig. 59.

Um die Feldstärke in diesem inneren Kraftfelde zu berechnen, haben wir die in zwei Punkten herrschende Potentialdifferenz durch den Abstand der Niveauflächen zu dividieren. Wir können hier, da das Kraftfeld als homogen anzusehen ist, die Potentialdifferenz an der inneren Kugel und an der Hülle durch den Abstand teilen und erhalten (unter Benutzung von Gleichung (6))

$$(11) \qquad K_n = \frac{V'' - V}{d} = \frac{\frac{e d}{r^2} - 0}{d} = \frac{e}{r^2} ,$$

und da $e = 4 \pi r^2 \varrho$, so wird

$$(12) \qquad K_n = 4 \pi \varrho .$$

Das ist natürlich dieselbe Gleichung, die wir § 52, Gleichung (4) auf anderem Wege schon erhalten haben.

§ 58. Der Plattenkondensator

Der Plattenkondensator besteht aus zwei meistens kreisförmigen Metallplatten, welche einander parallel in einem geringen Abstande gegenüberstehen, und von denen die eine zur Erde abgeleitet ist. Durch diese Platte, die Kondensatorplatte genannt wird, wird das Potential auf der anderen isolierten Platte, der man eine gewisse elektrische Ladung zuführt, und welche Kollektorplatte genannt wird, erniedrigt; also die Kapazität der Kollektorplatte wird durch Annäherung der abgeleiteten Kondensatorplatte vergrößert.

Die mathematisch genaue Berechnung der Verteilung der Elektrizität auf den Platten und die mathematisch genaue Bestimmung des Potentials und der Kapazität ist mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden. Nur unter Anwendung höherer Rechnung ist die Bestimmung durchführbar. Der Grund hierfür liegt erstens darin, daß die Verteilung der Elektrizität auf den beiden Platten abhängt von der ungleichförmigen Verteilung der Elektrizität auf jeder einzelnen, und daß außerdem sowohl die Wirkung der einander zugewandten, wie der abgewandten Flächen mit in Rechnung gezogen werden muß.

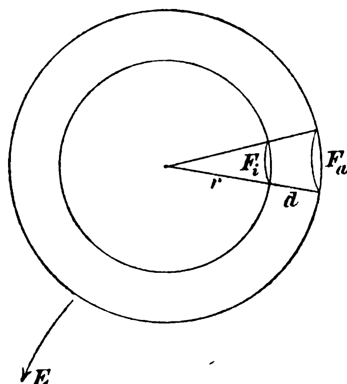


Fig. 60.

Für unsere Zwecke genügt eine angenäherte Berechnung, die erstens von der Voraussetzung ausgeht, daß die elektrische Dichte auf der ganzen Oberfläche konstant ist, und daß ferner nur die einander zugewandten Flächen benutzt werden. Unter diesen Voraussetzungen kommen wir sehr einfach zum Ziel, indem wir die Platten als Ausschnitte von unendlich großen Kugeln ansehen, für welche die Berechnungen des vorigen Paragraphen gültig sind.

Bedeuten wieder in Figur 60 die beiden Kreise die innere und äußere Belegung eines Kugelkondensators, so ziehen wir von dem Mittelpunkte der Kugeln einen kleinen Kreis-

kegel, welcher aus der inneren Kugel das Flächenstück F_i, aus der äußeren das Flächenstück F_a ausschneidet. Lassen wir den Radius der Kugeln wachsen, so gehen F_i und F_a in gleich große kreisförmige Platten über, von denen F_i die Kollektorplatte und F_a die Kondensatorplatte des Plattenkondensators wird. So entsteht die Figur 61. Der Radius der beiden Platten sei a, ihr Abstand d.

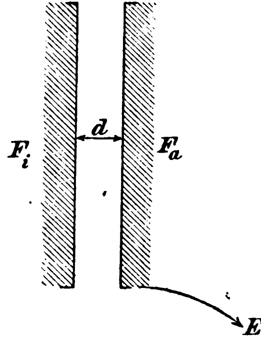


Fig. 61.

Nach Gleichung (9) können wir dann die Kapazität berechnen zu

$$C = \frac{O}{4\pi d}$$

und der $O = \pi a^2$,

$$(1) \qquad C = \frac{a^2}{4d}.$$

Die elektrische Ladungsmenge ist $e = \pi a^2 \varrho$, also können wir auch das Potential V berechnen nach der Gleichung $e = V \cdot C$,

$$(2) \qquad V = \frac{\pi a^2 \varrho}{a^2/4d} = 4\pi d \varrho.$$

Die Kapazität des Plattenkondensators ist also der Oberfläche der Platten direkt, der Dicke der Zwischenschicht umgekehrt proportional. Das Potential ist der Dicke der Schicht und der Ladungsdichte direkt proportional und bei gleicher Ladungsdichte unabhängig von der Plattengröße.

Das Potential in einem Punkte zwischen den Platten ist nach Gleichung (10) des vorigen Paragraphen wieder

$$(3) \qquad V_i = 4\pi \varrho (d - h).$$

Ebenfalls ist die Feldstärke nach Gleichung (12) des vorigen Paragraphen

$$(4) \qquad K_n = 4\pi \varrho.$$

§ 59. Das Dielektrikum.

Bei den in den vorigen Paragraphen behandelten Influenzwirkungen der Leiter aufeinander und bei den sich daraus ergebenden Folgerungen für die Wirkung der Kondensatoren wurde vorausgesetzt, daß die zwischen den Leitern befindliche isolierende Substanz Luft sei, und daß die Natur dieser isolierenden Substanz ohne Einfluß auf die Größe der Influenzwirkung sei. Diese Annahme war berechtigt, da wir die elektrostatische Kraft als eine reine Fernkraft von vornherein angesehen haben, und da wir aus dem Coulombschen Gesetze, das auf die Natur der isolierenden Substanz, also der Luft, keinerlei Rücksicht nimmt, alle übrigen Folgerungen gezogen haben.

Es ist das Verdienst Faradays, zuerst durch methodisch angelegte Versuche den Nachweis geliefert zu haben, daß die Natur der zwischen den Leitern vorhandenen isolierenden Substanz von bedeutendem Einfluß auf die elektrostatischen Kräfte und deren Wirkungen ist. Man bezeichnet die Substanz, durch welche hindurch alle elektrischen sogenannten Fernwirkungen von einem zum anderen Körper übertragen werden, mit dem Namen „Dielektrikum". Es ist nicht Aufgabe der Potentialtheorie, die Art und Weise, wie man sich die Übertragung der elektrischen Fernkräfte durch das Dielektrikum vorstellt, eingehend zu behandeln; das ist es im vorliegenden Falle um so weniger, als im XLI. Bande der Sammlung Schubert die „Theorie der Elektrizität und des Magnetismus" von Prof. J. Classen vollständig auf dem Boden der modernen Anschauungen über die Mitwirkung des Dielektrikums aufgebaut ist. Die „Potentialtheorie" behandelt nur die tatsächlichen Kraftgrößen und Arbeitsgrößen ohne Rücksicht auf die Art und Weise, wie sie zustande kommen.

Trotzdem spielt die Mitwirkung des Dielektrikums auch hier insofern eine Rolle, als die Größe des induzierten Potentials nach den Faradayschen Untersuchungen und den sich hieran schließenden Untersuchungen anderer Physiker auch von der Art des Dielektrikums abhängt.

Das zeigt sich ganz besonders durch den Fundamentalversuch Faradays, mit welchem er die Mitwirkung des Dielektrikums auf die Influenz nachwies.

Faraday stellte sich einen sphärischen Kondensator her von der Form der Figur 57, doch so, daß er den zwischen den Kugeln vorhandenen Zwischenraum sowohl luftleer machen, wie auch mit nichtleitenden Körpern der verschiedensten Art füllen konnte, und beobachtete die Verstärkungszahl desselben einmal, wenn er mit Luft, dann wenn er mit anderen Substanzen gefüllt war. Er beobachtete nun, daß diese Verstärkungszahl von der Art der Substanz abhängt.

Wir nennen den Quotienten der Verstärkungszahl des Kondensators, wenn er mit der untersuchten Substanz gefüllt ist, zu der Verstärkungszahl des lufterfüllten Kondensators die „Dielektrizitätskonstante“ der Substanz. Das ist auch dasselbe wie der Quotient aus der Kapazität des Kondensators mit dem untersuchten Dielektrikum und der Kapazität des Luftkondensators.

Hieraus folgt auch sofort, wenn die Dielektrizitätskonstante mit $\varkappa$ bezeichnet wird, und wenn man die Kapazität eines Luftkondensators C, die desselben Kondensators mit dem untersuchten Dielektrikum mit C' bezeichnet, daß

$$C' = \varkappa \cdot C$$

ist. Die Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten ist von einer großen Zahl von Physikern für wohl fast alle Substanzen ausgeführt. Die Methoden zur Bestimmung derselben sind außerordentlich zahlreich. Wir können diese hier nicht ausführlich beschreiben. Doch möge hier eine Methode angegeben werden, die zwar nur für feste Dielektrika anwendbar ist, aber die sich unmittelbar an die ursprüngliche Definition anschließt und sehr bequem ausführbar ist.

Man braucht einen Plattenkondensator mit drei Platten (Fig. 62), von denen die mittlere fest isoliert aufgestellt ist, während die beiden anderen seitlichen Platten gegen die mittlere meßbar zu verschieben sind. Wenn man nach Figur 63, die eine schematische Darstellung der Versuchsanordnung zeigt, die mittlere Platte A mit irgend einer Elektrizitätsquelle auf das Potential $+V_1$ durch eine positive elektrische Ladung bringt, so findet auf den Platten B und C eine Influenzladung mit negativer Elektrizität statt, während die positive Influenzelektrizität der beiden Platten durch dünne Drähte zu einem Blättchenelektroskop E geführt wird, das aus einem mit positiver Ladung versehenen

Aluminiumblättchen besteht, dem zu beiden Seiten zwei kleine isolierte Platten F und G in gleichem Abstande seitlich gegenüberstehen. Wenn die Platten F und G gleich stark positiv geladen sind, wird das Elektroskopblättchen von beiden Seiten gleich stark abgestoßen und nimmt die an einem Index ablesbare mittlere Nullstellung ein. Ist da-

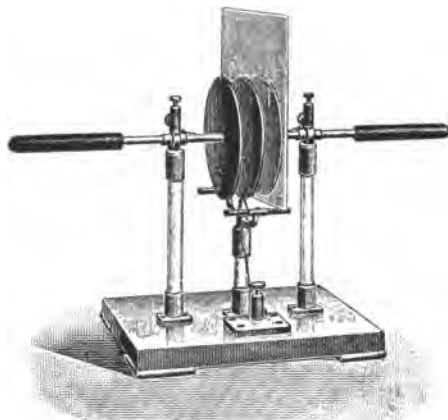


Fig. 62.

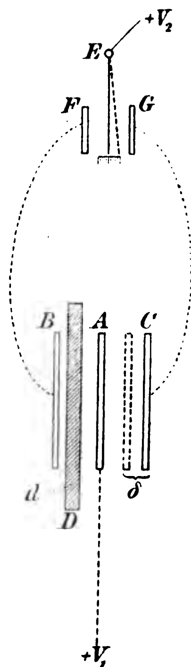


Fig. 63.

gegen die Ladung der beiden Platten F und G ungleich, so weicht das Aluminiumblättchen aus seiner mittleren Lage ab. Die beiden Platten F und G sind mit den seitlichen Kondensatorplatten B und C verbunden. Bei gleichen Abständen von B und C gegenüber A bleibt bei Ladung der Platte A das Aluminiumblättchen E in seiner Ruhelage. Schiebt man nun eine Platte aus isolierender Substanz, also ein Dielektrikum, von der Dicke d zwischen die Platten A

und B, so weicht das Aluminiumblättchen nach rechts aus, zum Zeichen, daß die Influenzladung größer geworden ist. Man muß nun, um das Aluminiumblättchen wieder in die Nullage zurückzuführen, die Kondensatorplatte C der mittleren Platte um einen gewissen Betrag δ nähern, damit das Aluminiumblättchen wieder in die Nullage kommt.

Die Größe der Dielektrizitätskonstante $\varkappa$ berechnet sich am einfachsten aus folgender Überlegung.

Wir haben es auf beiden Seiten mit einem Plattenkondensator zu tun, dessen Kapazität der Dicke der dielektrischen Schicht umgekehrt proportional ist. Die Kapazität beider Kondensatoren ist gleich, wenn bei gleichem Dielektrikum auch die Schichtdicken gleich sind, daher war zu Beginn des Versuchs das Aluminiumblättchen in Ruhe. Dadurch, daß wir das Dielektrikum D von der Dicke d in den linken Zwischenraum gebracht haben, ist die Luftschicht um die Dicke d vermindert. Dafür ist aber eine Schichtdicke d von dem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante $\varkappa$ eingeführt. Diese entspricht aber, da die Dielektrizitätskonstante das Verhältnis der Kapazitäten, also hier das umgekehrte Verhältnis der gleichwertigen Schichtdicken bezeichnet, einer Luftschicht von der Dicke $\frac{d}{\varkappa}$. Wir können den Vorgang also so auffassen, daß auf der linken Seite die Luftschicht d entfernt, dafür aber eine einer Luftschicht $\frac{d}{\varkappa}$ entsprechende andere Platte eingefügt ist. Die wirkliche Verminderung der Schichtdicke hat also $d - \frac{d}{\varkappa}$ betragen. Um die Kapazitäten auf beiden Seiten wieder gleich zu machen, ist auf der rechten Seite die Platte C um den Betrag δ genähert, also ist hier die Schichtdicke um den Betrag δ vermindert. Daraus folgt, daß

$$d - \frac{d}{\varkappa} = \delta$$

und hieraus, daß

$$\varkappa = \frac{d}{d - \delta}$$

ist. Aus der großen Zahl der bekannten Dielektrizitäts-

konstanten mag hier nur eine beschränkte Auswahl verzeichnet werden:

Glas	4—7	Alkohol	25
Hartgummi	2,5	Terpentinöl	2,2
Schwefel	3	Wasser	81.

Es erscheint selbstverständlich, daß das ganze Kraftfeld durch das Vorhandensein verschiedener Dielektrika wesentlich deformiert wird.

Wenn wir bedenken, daß die Kapazität eines Kugelkondensators, dessen isolierende, also dielektrische Schicht aus Luft besteht, nach § 57 Gleichung 3 durch den Ausdruck

$$V = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

bestimmt ist, und wenn wir ferner bedenken, daß die Dielektrizitätskonstante $\varkappa$ durch den Quotienten der Kapazitäten zweier Kondensatoren bestimmt ist, von denen der eine als isolierende Schicht das Dielektrikum, der andere Luft enthält, so ergibt sich, daß bei gleicher Ladung e dieser beiden Kondensatoren der reziproke Wert der Dielektrizitätskonstante durch den Quotienten der erzeugten Potentiale bestimmt ist, daß also das Potential eines Kugelkondensators mit dem inneren Radius r und dem äußeren Radius r_1, der als dielektrische Schicht das Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante $\varkappa$ enthält, durch den Ausdruck

$$V = \frac{1}{\varkappa} \cdot e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

bestimmt ist.

Lassen wir in diesem Kugelkondensator die äußere Kugel unendlich groß werden, setzen wir also $r_1 = \infty$, so wird

$$V = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{e}{r}. \tag{1}$$

Hieraus folgt, daß das Potential einer freien Kugel innerhalb des Dielektrikums nur den $\varkappa$ten Teil des Potentials in Luft beträgt. Hieraus können wir ferner schließen, daß alle unsere früheren und ebenso alle späteren Überlegungen und Formeln sofort für ein solches Dielektrikum

gelten, wenn wir den Potentialwert durch die Dielektrizitätskonstante dividieren.

So nimmt auch der Potentialwert eines Plattenkondensators mit der dielektrischen Schicht von der Dicke d und der Oberflächendichte ϱ in Erweiterung der Gleichung (2) des § 58 den Wert

$$V = \frac{4\pi}{\varkappa} d \cdot \varrho \tag{2}$$

an. Die Feldstärke beträgt innerhalb der dielektrischen Schicht, da das Feld homogen ist,

$$K_n = \frac{V}{d} = \frac{4\pi}{\varkappa} \cdot \varrho \,. \tag{3}$$

Wir wollen uns nun noch einen Plattenkondensator herstellen, der aus zwei durch eine Luftschicht D getrennten Platten besteht, und wollen parallel zu den Platten eine planparallele Platte aus einem Dielektrikum ($\varkappa$) von der Dicke d einschieben, also so verfahren, wie es auf der linken Seite des Doppelkondensators (Fig. 63) geschehen ist.

Wenn die Feldstärke innerhalb des zwischen den Platten liegenden Luftraumes gleich K_n ist, so ist die Feldstärke innerhalb des Dielektrikums gleich $\frac{K_n}{\varkappa}$, es findet also an der Grenze des Dielektrikums ein Kraftsprung von der Größe

$$K_n - \frac{K_n}{\varkappa} = K_n\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right)$$

statt.

Ein solcher Kraftsprung kann nur erklärt werden durch das Auftreten freier elektrischer Ladungen an der Oberfläche des Dielektrikums. Nennen wir die Oberflächendichte dieser freien elektrischen Ladung ϱ', so muß die Normalkraft dieser freien Ladung, also $4\pi\varrho'$ gleich dem Kraftsprunge sein; doch muß man bedenken, daß die Richtung des Kraftsprunges der Richtung der Normale entgegengesetzt ist, daß daher ein Zeichenwechsel vorgenommen werden muß, um das richtige Vorzeichen der Ladung zu erhalten. Es ist daher

$$4\pi\varrho' = -K_n\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right),$$

also

(4) $$\varrho' = -\frac{K_n}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right).$$

War die Oberflächendichte des Plattenkondensators ϱ, so ist $K_n = 4\pi\varrho$, also wird unter Benutzung dieses Ausdruckes

$$\varrho' = -\varrho\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right).$$

Hieraus folgt, daß eine parallel den Platten eines mit der Oberflächendichte ϱ geladenen Plattenkondensators eingeführte dielektrische Platte an der Oberfläche elektrisch geladen wird mit der Oberflächendichte

(5) $$\varrho' = -\varrho\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right).$$

Führt man in den Luftraum des Plattenkondensators die dielektrische Schicht nicht parallel der Platte ein, sondern so, daß sie gegen die Begrenzungsplatten unter dem Winkel φ geneigt ist, so wirkt auf die Oberfläche des Dielektrikums nur die Komponente $K_n \cos\varphi$ senkrecht zur Oberfläche. Daher ist auch die dann hervorgerufene Flächendichte

(6) $$\varrho' = \varrho\cos\varphi\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right).$$

Auf Grund dieser Formel läßt sich nun noch herleiten, daß die Kraftlinien eines elektrostatischen Feldes durch die Einführung eines Dielektrikums ($\varkappa$) eine Richtungsänderung erfahren. Wir wollen nur den Fall behandeln, daß das elektrostatische Feld homogen ist, also von der Beschaffenheit ist, wie im Luftraume des Plattenkondensators.

Es sei (Fig. 64) TT die Trennungsschicht zwischen dem links gelegenen Luftraume und dem rechts gelegenen Dielektrikum. Durch den kleinen Pfeil links vor dem Buchstaben A sei die Kraftrichtung im Luftraume bestimmt. Eine Kraftlinie treffe die Trennungsschicht im Punkte O so, daß ihre Richtung mit der Richtung des in O auf TT errichteten Lotes den Winkel φ einschließt. Die Strecke AO stelle die Größe der Oberflächendichte der Ladung des Plattenkondensators dar. Diese Strecke ist dann auch gleich-

zeitig der Repräsentant für die Größe der Feldstärke, denn die Feldstärke ist ja von der Oberflächendichte nur durch den Faktor 4π unterschieden. Das Lot $AF = r\cos\varphi$ re-

Fig. 64.

präsentiert dann die normal zur Oberfläche TT vorhandene Komponente der Feldstärke. Infolge dieser normalen Komponente entsteht auf der Trennungsschicht TT eine negative elektrische Ladung von der Dichte ϱ', welche nach Gleichung (6) durch

$$\varrho' = -\cos\varphi\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right)$$

bestimmt ist. Infolge dieser negativen Ladung, die eine im Dielektrikum normal zur Oberfläche wirkende Kraftkomponente nach der Trennungsschicht hin gerichtet hervorruft, unterliegt innerhalb des Dielektrikums das Feld der Einwirkung zweier Kräfte, nämlich erstens der in der Richtung OC wirkenden Kraft von einer Größe, die ϱ direkt proportional ist und einer normal zur Oberfläche in der Richtung OD wirkenden Kraft proportional der Oberflächenladung ϱ'. Diese beiden Kräfte können nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammengesetzt werden. Ergänzt man die beiden Strecken OC und OD zum Parallelogramm $OCED$, und zieht man OE, so ist diese Diagonale der innerhalb

des Dielektrikums wirkenden Resultierenden der beiden Kräfte direkt proportional.

Die Richtung der Resultierenden ist durch den Winkel $LOE = \varphi'$ bestimmt, der sich aus dem Dreieck OCE berechnet nach der Proportion

$$\sin(\varphi' - \varphi) : \sin(180 - \varphi') = \varrho' : \varrho .$$

In diese Gleichung setzen wir den Wert von ϱ' ein und formen die Gleichung um

$$\frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\sin\varphi'} = \frac{\varrho\cos\varphi\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right)}{\varrho} ,$$

$$\frac{\sin\varphi'\cos\varphi - \cos\varphi'\sin\varphi}{\sin\varphi'\cos\varphi} = 1 - \frac{1}{\varkappa} ,$$

$$1 - \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{cotg}\varphi' = 1 - \frac{1}{\varkappa} ,$$

und hieraus

$$\operatorname{tg}\varphi' : \operatorname{tg}\varphi = \varkappa : 1 . \tag{7}$$

Diese Proportion zeigt uns, daß die elektrostatischen Kraftlinien beim Eintreten aus Luft in ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten $\varkappa$ eine ähnliche Ablenkung erfahren, wie ein Lichtstrahl bei Eintritt aus Luft in ein anderes brechendes Medium, doch mit dem Unterschiede, daß hier die beiden Winkel nicht durch ihre Sinusfunktion sondern durch ihre Tangensfunktion in einem nur von der Dielektrizitätskonstanten abhängigen Verhältnis stehen.

Es mag zum Schluß für diesen Paragraphen noch erwähnt werden, was ja aus dem Ausdrucke für das Potential unmittelbar folgt, daß auch innerhalb jedes Dielektrikums das Coulombsche Gesetz gilt, doch mit dem Unterschiede, daß unter Benutzung der früher eingeführten Einheiten die Kraft, mit der zwei elektrische Ladungen aufeinander wirken, bestimmt ist durch den Ausdruck

$$K = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} .$$

Die Abhängigkeit der elektrischen Kraft von der Dielektrizitätskonstante hat zu der Annahme geführt, daß das

Dielektrikum der eigentliche Sitz und Träger der elektrischen Wirkungen ist.

Die Theorie der Elektrizität, welche auf die im Dielektrikum vor sich gehende Erscheinungen gegründet ist, ist von Faraday angeregt und besonders von Maxwell und Hertz ausgebaut.

§ 60. Die Franklinsche Tafel, die Leidener Flasche.

Die Kapazität eines Plattenkondensators wurde in § 58 bestimmt zu $C = \frac{O}{4\pi d}$ unter der Voraussetzung, daß die isolierende Zwischenschicht Luft war. Der vorige Paragraph hat uns belehrt, daß wir bei Benutzung einer Zwischenschicht mit der Dielektrizitätskonstante $\varkappa$ diesen Ausdruck noch mit $\varkappa$ zu multiplizieren haben, so daß wir also schreiben müssen

$$C = \varkappa \cdot \frac{O}{4\pi d}. \tag{1}$$

Diese Formel ist unmittelbar anwendbar auf die Form des Plattenkondensators, bei der zwei Stanniolbelegungen auf die beiden Seiten einer Hartgummi- oder Glasplatte aufgeklebt sind. Diese Form des Kondensators wird eine Franklinsche Tafel genannt.

Laden wir eine solche Franklinsche Tafel mit der Elektrizitätsmenge e, so wird das Potential $V = \frac{e}{C}$, also

$$V = \frac{4\pi d e}{\varkappa \cdot O}. \tag{2}$$

Die zu dieser Ladung erforderliche Energie, also auch die potentielle Energie der geladenen Tafel oder das Potential der geladenen Tafel auf sich selbst wird nach § 51 bestimmt durch

$$E = \tfrac{1}{2} e V$$

$$= \frac{2\pi d e^2}{\varkappa \cdot O} \tag{3}$$

$$= \varkappa \cdot \frac{O}{8\pi d} \cdot V^2. \tag{4}$$

Die zur Ladung erforderliche Energie wird bei der Entladung wieder frei, sie setzt sich gewöhnlich bei der Funkenentladung in Wärme um.

Dieselben Werte gelten für jeden Kondensator, der aus zwei parallelen Belegungen eines Isolators gebildet ist. Die bekannteste und für den Gebrauch bequemste Form ist die der Leidener Flasche, bei der zwei Stanniolbelegungen auf die Innen- und die Außenseite eines Glasgefäßes aufgeklebt sind. Bei der gewöhnlichen Art der Benutzung wird die äußere Belegung zur Erde abgeleitet und die innere Belegung mit der Elektrizitätsquelle zum Zwecke der Ladung verbunden.

Zur Veranschaulichung der Größe der Kapazität und der aufgesammelten potentiellen Energie einer solchen Flasche möge als Beispiel eine Flasche dienen, deren Bodendurchmesser 10 cm, deren Belegungshöhe 20 cm und deren Wandungsdicke 0,2 cm ist. Die Flasche besteht aus Glas mit der Dielektrizitätskonstante 5, sie ist geladen bis zum Potential 100.

Da die Oberfläche

$$O = 5^2 \cdot \pi + 10 \cdot \pi \cdot 20 = 225\,\pi \text{ qcm}$$

ist, so ist die Kapazität

$$C = \frac{5 \cdot 225\,\pi}{4 \cdot \pi \cdot 0{,}2} = \frac{1125}{0{,}8} = 1406 \text{ cm}.$$

Die Flasche hat also dieselbe Kapazität wie sie eine freie und isolierte Kugel von 14 m Radius haben würde. Man erkennt hieraus den großen Nutzen der Anordnung, wenn es sich darum handelt, große Kapazitäten auf kleinem Raum herzustellen.

Die potentielle Energie ist

$$E = \frac{5 \cdot 225\,\pi \cdot 100^2}{8\,\pi \cdot 0{,}2} = \frac{11\,250\,000}{1{,}6} = 7 \cdot 10^6 \text{ erg}.$$

Nehmen wir an, die gesamte Energie würde bei der Entladung durch einen Funken in Form von Wärme wieder frei, so wissen wir, daß 1 erg $= 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ Kalorien liefert, also ist

$$E = 7 \cdot 10^6 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ cal}$$
$$= 0{,}17 \text{ cal}.$$

§ 61. Die Elektrometer.

Die Apparate zum Messen des Potentials führen den Namen Elektrometer. Sie beruhen alle auf der ponderomotorischen Wirkung der elektrischen Abstoßung und Anziehung, indem der Arbeitswert eines Potentials benutzt wird zur Leistung einer mechanischen Arbeit, also entweder zum Heben eines Gewichtes oder zur Torsion eines Drahtes oder zur Bewegung eines Magneten entgegen der richtenden Kraft eines anderen Magneten oder der Erde.

Die Coulombsche Drehwage (§ 34) und das Pendel-Elektrometer (§ 35) sind schon beschriebene Formen der Elektrometer. Bei der Coulombschen Drehwage wird die Abstoßung elektrisch geladener Kügelchen benutzt, um einen Draht zu tordieren. Aus der Größe der Torsion kann in der dort dargestellten Weise die Elektrizitätsmenge und damit auch das Potential gemessen werden. Verschiedene Abänderungen der Drehwage sind von Dellmann, Kohlrausch und Rieß ausgeführt.

Bei dem Pendel-Elektrometer wird die Abstoßung zweier Kugeln zur Hebung der beweglichen Pendelkugel benutzt. Es setzt sich auch hier unmittelbar ein Teil der potentiellen Energie der geladenen Kugeln in die zur Hebung der abgestoßenen Kugeln nötige Arbeit um. Macht man die Pendelkugel des Pendel-Elektrometers besonders leicht, so wird dadurch der eine Faktor der Gravitationsenergie, nämlich das Gewicht, klein, folglich wird der andere Faktor der Energie, das ist die Höhe, auf welche der Körper gehoben wird, größer, das zeigt sich an einem größeren Ausschlage des abgestoßenen Körpers. Nach diesem Prinzip sind die sogenannten Blättchenelektrometer konstruiert, von denen Figur 65 eine besondere Form zeigt.

In einem allseitig, bis auf ein rechteckiges Fenster auf der Vorder- und der Hinterfläche, geschlossenen Blechkasten, der durch Stellschrauben in eine bestimmte vertikale Lage gebracht werden kann, ist in den Deckel durch einen Hartgummistopfen E eine dünne Metallstange A eingesetzt, an derem oberen Ende ein leichtes Aluminiumblättchen F befestigt ist, das bei seiner Bewegung mit seinem unteren Ende über einer Gradeinteilung G spielt. Ein Metallarm B ist um eine Achse drehbar, die mit dem Aufhängepunkt S des Blättchens F

zusammenfällt. Dieser Metallarm *B* dient erstens dazu, beim Nichtgebrauch das Instrument bis an die Stange *A* hinangedreht, das Aluminiumblättchen vor Beschädigung zu schützen und zweitens die Empfindlichkeit des Apparates bei

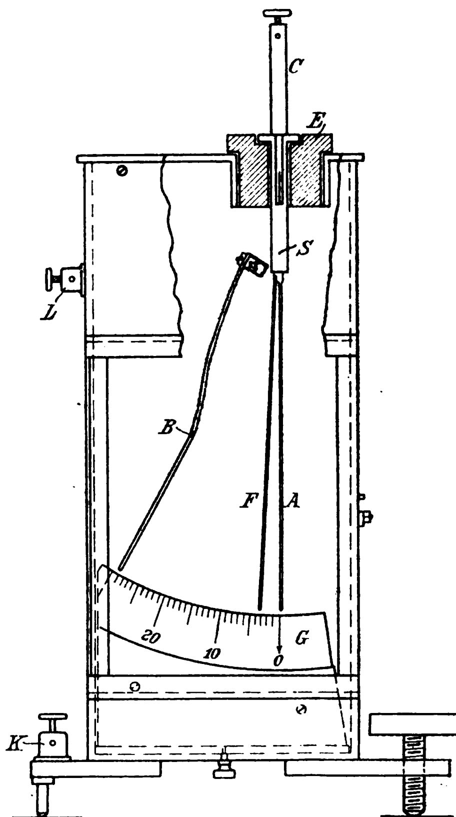


Fig. 65.

der Bestimmung kleiner Potentiale dadurch zu erhöhen, daß man den Arm bis in die Nähe von *F* hinandreht. *A* und *B* verhalten sich zueinander ähnlich, wie die beiden Platten eines Kondensators mit dem Unterschiede, daß das zwischen *A* und *B* herrschende Kraftfeld hier nicht homogen

ist. Die durchschnittliche Feldstärke in dem Raume zwischen *A* und *B* ist um so größer, je größer die Potentialdifferenz von *A* und *B* und je kleiner ihr Abstand ist. Dadurch, daß man den Arm *B* der Stange *A* beliebig nähern kann, kann man unabhängig von der Potentialdifferenz die Feldstärke vergrößern, also den Apparat empfindlicher machen. Die Klemme *C* dient zur Verbindung des auf sein Potential zu messenden Körpers mit dem Elektrometer. Mittels der Klemme *K* kann das Gehäuse auf ein beliebiges Potential gebracht werden. Die Klemme *K* stellt die Verbindung des Gehäuses mit dem drehbaren Arme *B* her.

Die Zahl der konstruierten Blättchenelektrometer ist außerordentlich groß. Eine weitgehende Verbreitung hat die von Elster und Geitel modifizierte Form des Exnerschen Blättchenelektrometers gefunden. Die Messung des Potentials mit dem Blättchenelektrometer kann nur auf Grund einer empirischen Eichung der angebrachten Gradskala erfolgen, da das durch die geladenen Teile erzeugte elektrostatische Feld und die Verteilung der elektrischen Ladung auf den Blättchen bisher noch nicht mathematisch durchgerechnet ist.

Das Thomsonsche Plattenelektrometer.

Auf dem Prinzip der Anziehung elektrischer Ladungen beruht auch das von W. Thomson (Lord Kelvin) konstruierte sogenannte absolute Plattenelektrometer.

Figur 66 gibt ein Bild des Apparates. Die wesentlichen Teile sind die beiden Platten *Q* und *P*, von denen die Platte *Q* isoliert fest aufgestellt und die Platte *P* so aufgehängt ist, daß ihre Anziehung oder Abstoßung gemessen werden kann. Das ist in Figur 66 dadurch geschehen, daß die Platte unmittelbar an das eine Ende des Wagebalkens einer empfindlichen Wage so aufgehängt ist, daß bei ungeladenen Platten die Zunge der Wage über dem Nullpunkte der kleinen Teilung am Stativ der Wage steht.

Bei verschiedenem elektrostatischen Potential der beiden Platten *P* und *Q* findet eine Anziehung der Platten statt, deren Größe dadurch gemessen werden kann, daß durch bekannte Gewichte, die man auf die rechte Schale der Wage legt, die Zunge der Wage wieder zum Einspielen gebracht wird.

Die Abhängigkeit der Anziehung der Platte P durch die Platte Q soll noch berechnet werden. Diese Berechnung ist leicht auszuführen, wenn man annehmen kann, daß die Dichte der Ladung an allen Punkten von P konstant ist. Nun wissen wir, daß das für die mittleren Teile einer kreisförmigen geladenen Platte stimmt, während am Rande eine größere Dichte herrscht. Thomson hat durch ein einfaches Verfahren die Wirkung der inhomogen geladenen Randpartien ausgeschieden, indem er um die Platte P einen Ring S von

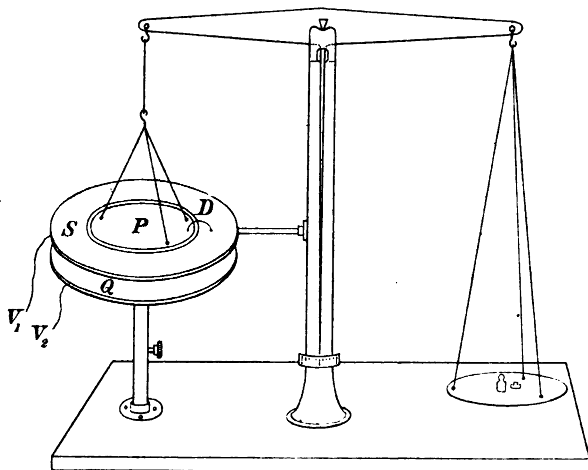


Fig. 66.

derselben Dicke und derselben Beschaffenheit wie P legt, der aber mit geringem Zwischenraum der Platte P vollkommen freie Bewegung gestattet. Durch einen sehr feinen Draht D, der der Beweglichkeit der Platte P einen möglichst geringen Widerstand entgegensetzt, wird bewirkt, daß das Potential von P und von S übereinstimmt. Durch diesen sogenannten Schutzring wird bewirkt, daß nur die mittleren homogen geladenen Partien in Bewegung gesetzt werden, während die inhomogenen Randpartien von dem festen Schutzringe gebildet werden.

Wir können daher zur Berechnung der Abhängigkeit der Anziehungskraft von der Größe der Potentialdifferenz

$V_1 - V_2$ der Platten P und Q annehmen, daß die Platte P homogen mit elektrischer Ladung belegt ist.

In Figur 67 sind die Platten P und Q mit dem Schutzring S und dem verbindenden Draht D noch einmal im

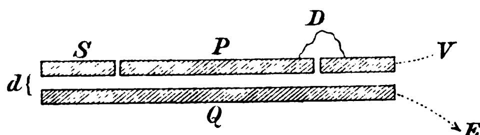


Fig. 67.

Durchschnitt gezeichnet. Der Abstand der Platte sei d. Wir nehmen der Einfachheit halber an, die Platte Q sei mit der Erde leitend verbunden, habe also das Potential Null, während nur die Platte P mit dem Schutzringe S auf das zu messende Potential gebracht werden soll.

Das zwischen den beiden Platten P und Q herrschende Kraftfeld können wir genau so betrachten, wie das Feld zwischen den Platten eines Plattenkondensators. Wie wir in § 58 gesehen haben, ist dieses Feld homogen, die Feldstärke an einem beliebigen Punkte des Feldes ist

$$K_n = 4\pi\varrho ,$$

wo wieder mit ϱ die Ladungsdichte auf der Platte P bedeutet. Eine zwischen den Platten P und Q vorhandene Einheit der Elektrizität würde also mit der Kraft $4\pi\varrho$ von P nach Q bewegt werden. Bedenken wir nun aber, daß außerhalb der einander zugewandten Flächen, also in der Metallmasse der Platten die Feldstärke Null ist, so würde eine im Innern der Platte P befindliche Einheit der Elektrizität keine Kraftwirkung erfahren. Das entspricht durchaus unserer früher gemachten Betrachtung, daß beim Durchgange durch ein mit der Ladungsdichte ϱ geladenen Fläche die Kraftgröße einen unstetigen Sprung um $4\pi\varrho$ macht (siehe § 52).

Daraus folgt, daß eine auf der inneren Oberfläche der Platte P befindliche Einheit der elektrostatischen Ladung eine Kraftwirkung von $\frac{1}{2} K_n = 2\pi\varrho$ in der Richtung nach Q erfährt.

Ist nun e die gesamte auf der inneren Oberfläche von P vorhandene Ladungsmenge, so ist die Anziehungskraft, die P erfährt,

$$A = 2\pi\varrho e\,.$$

Die Flächengröße der Platte P sei F, dann ist

$$e = F \cdot \varrho\,,$$

folglich

$$A = 2\pi\varrho^2 F\,.$$

Hieraus berechnet sich

$$\varrho = \sqrt{\frac{A}{2\pi F}}\,.$$

Nach § 58 Gleichung (2) ist das Potential der nicht abgeleiteten, also der geladenen Platte eines Plattenkondensators

$$V = 4\pi d\varrho\,.$$

Setzen wir hier den berechneten Wert von ϱ ein, so wird

$$V = 4\pi d\sqrt{\frac{A}{2\pi F}}\,,$$

also vereinfacht

(1) $$V = d\sqrt{\frac{8\pi A}{F}}\,.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir das Potential der Platte P, also auch das Potential eines mit der Platte P leitend verbundenen Körpers bestimmen, wenn die Platte Q zur Erde abgeleitet wird.

Da die Kraftwirkung zweier elektrischer Körper nur von der Potentialdifferenz abhängt, so wird, wenn das Potential der oberen Platte V_1, das der unteren V_2 ist, der Wert der Potentialdifferenz durch denselben Ausdruck bestimmt, so daß wir schreiben können

(2) $$V_1 - V_2 = d\sqrt{\frac{8\pi A}{F}}\,.$$

Um demnach mit dem Thomsonschen Schutzring-Elektrometer eine Potentialdifferenz zu bestimmen, müssen wir die Größe der Platte P, die Größe der Anziehung (in

dyn ausgedrückt) und die Entfernung der Platten kennen. Die Bestimmung führt also fast unmittelbar auf die Fundamentaleinheiten; aus diesem Grunde wird dieses Elektrometer auch ein absolutes Elektrometer genannt.

Das Quadrantelektrometer.

Um eine höhere Empfindlichkeit für Potentialmessungen zu erreichen, verwandte W. Thomson eine Hilfsladung, deren Größe er beliebig wählen konnte, wodurch er bis zu hohem Grade in den Stand gesetzt wurde, die Empfindlichkeit innerhalb weiter Grenzen zu verändern und auch auf eine sehr große Höhe zu bringen.

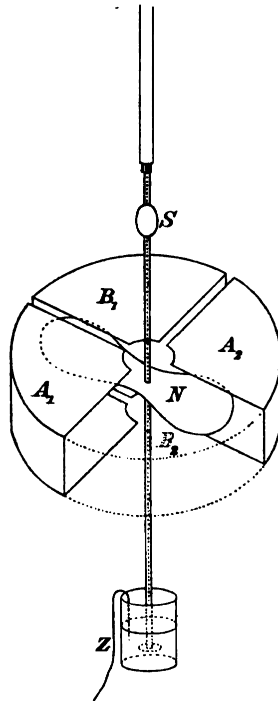


Fig. 68.

Die wesentlichsten Teile des Quadrantelektrometers sind in Figur 68 abgebildet. Eine niedrige zylindrische Dose aus Metall ist durch zwei senkrecht zueinander geführte Achsenschnitte in vier gleich große Teile, die Quadranten geteilt, und diese Quadranten, von denen in der Figur nur drei gezeichnet sind, während der vierte fortgenommen, also nur punktiert angedeutet ist, sind isoliert aufgestellt. Doch sind die Quadranten paarweise miteinander durch dünne Drähte, die in der Figur ebenfalls nicht gezeichnet sind, leitend miteinander verbunden, so daß A_1 und A_2 einerseits, B_1 und B_2 andererseits miteinander in Verbindung stehen. Von jedem dieser Quadrantenpaare führt ein dünner Draht isoliert zu zwei Klemmschrauben außerhalb des ganzen, nicht gezeichneten, Gehäuses. Der Boden und der Deckel der Quadrantendose sind mit einer zentralen Öffnung versehen, durch welche eine Achse frei hindurchgeht. Innerhalb der Quadrantendose ist ein dünnes Aluminiumblech N

befestigt, das ungefähr die Form einer Lemniskate hat. Dieses Blech, das den Namen Nadel führt, soll genau in der halben Höhe der Quadrantendose frei axial drehbar sein und soll in der Ruhelage genau in der Richtung einer Teilungslinie der Quadranten stehen. Die Achse der Nadel endet am oberen Ende in einer Fassung für das untere Ende des oder der Aufhängefäden. Unterhalb dieser Fassung ist an der Achse ein kleiner leichter Spiegel für die Spiegelablesung befestigt. Das untere Ende der Achse endet in einen feinen Platindraht, der an seinem unteren Ende eine kleine kreisförmige Platinscheibe trägt, mit welcher er in ein Gläschen mit Schwefelsäure taucht. In das Gläschen taucht andererseits ein Platindraht Z von außen ein, der die Zuleitung einer elektrischen Ladung durch die Schwefelsäure und durch die Achse nach der Nadel N besorgen soll.

Der ganze Apparat befindet sich in einem Gehäuse, das ihn besonders gegen Luftzug und Staub, oder auch, wenn das Gehäuse von Metall ist, gegen äußere elektrische Einflüsse schützen soll. Am oberen Ende des Gehäuses ist ein Torsionskopf angebracht, an dem das obere Ende des Aufhängefadens oder der Aufhängefäden (Kokonfäden) befestigt sind. Im Falle nur ein Aufhängefaden vorhanden ist, bringt man wohl auch noch einen kleinen Magneten an der Achse an, durch dessen Richtkraft die Nadel die bestimmte Nullage bekommt. Wenn man zwei Aufhängefäden verwendet, ist die Richtkraft der Bifilaraufhängung genügend. Man kann auch als Aufhängung einen dünnen Metalldraht verwenden, der dann gleich als Zuleitung für die elektrische Ladung der Nadel verwandt werden kann. In diesem Falle ist das untere Schwefelsäuregefäß überflüssig, oder es dient nur zur Austrocknung des Gehäuses und zur Dämpfung der Schwingungen.

Wenn die Nadel N auf ein gewisses Potential $+V$ geladen ist, so wird sie bei vollkommen symmetrischer Stellung zu den Quadranten auch bei noch so hohem Potential in ihrer Nullstellung verharren. Man hat hierin ein Mittel, die Nullstellung der Nadel zu kontrollieren. Ist die Nullstellung hergestellt, und lädt man nun das Quadrantenpaar A auf das Potential $+V_A$, das Quadrantenpaar B auf das Potential $+V_B$, so erfährt die Nadel von beiden Quadrantenpaaren eine Abstoßung. Sind die Potentiale V_A

und V_B gleich, so ist auch die Abstoßung gleich und die Nadel bleibt in Ruhe. Wenn aber die Potentiale V_A und V_B voneinander verschieden sind, so wird die Nadel von dem Quadrantenpaare, dessen Potential höher ist, eine größere Abstoßung erfahren. Dadurch erfährt die Nadel N ein Drehungsmoment, welches erst durch das durch die Aufhängung bewirkte Drehungsmoment aufgehoben wird. Hieraus ergibt sich, daß die Ablenkung der Nadel, die durch die Beobachtung im Spiegel S beobachtet werden kann, ein Maß für die Potentialdifferenz $V_A - V_B$ abgeben wird.

Für ganz geringe Ausschläge gilt in erster Annäherung das Gesetz, das bei allen Instrumenten, bei denen eine Ablenkung eintritt, richtig ist, daß nämlich die Größe des Ausschlages der Größe der den Ausschlag bewirkenden Kraft, also hier der Potentialdifferenz, proportional ist.

Für die Berechnung der genaueren Beziehung zwischen den Potentialen V, V_A, V_B und dem Ausschlage φ der Nadel ergibt sich folgende Überlegung:

Wir berechnen die potentielle Energie der durch die Ladungen bewirkten Drehung. Diese muß gleich der potentiellen Energie des tordierten Drahtes sein.

Die potentielle Energie eines geladenen Leiters wird bestimmt durch $E = \frac{1}{2} e V$, wo e die Ladungsmenge und V das Potential ist. Beträgt die Kapazität des Leiters C, so ist $e = CV$, folglich können wir der potentiellen Energie des Leiters auch die Form geben

(3) $$E = \frac{1}{2} C V^2 .$$

Hierbei war vorausgesetzt, daß das Potential des Leiters gegen das Nullpotential der Erde gerechnet ist. Hat aber das Gesamtfeld, in dem der Leiter sich befindet, das Potential V', und wollen wir nur berechnen, wie groß die potentielle Energie des Leiters ist im Vergleich zu diesem Potential, so kommt nur die Potentialdifferenz $V - V'$ in Frage, so daß wir also schreiben müssen

(4) $$E = \frac{1}{2} C (V - V')^2 .$$

Es möge in Figur 69 der Grundriß der Quadrantendose gezeichnet sein mit dem Quadrantenpaare $A_1 A_2$, das auf das Potential V_A und mit dem Quadrantenpaare $B_1 B_2$, das auf das Potential V_B geladen ist, während das Poten-

tial der Nadel V beträgt. Wollen wir die potentielle Energie der Nadel berechnen, so müssen wir ihre Kapazität kennen. Wir wollen annehmen, daß die Kapazität für die Flächeneinheit c beträgt. Das setzt voraus, daß die Verteilung der

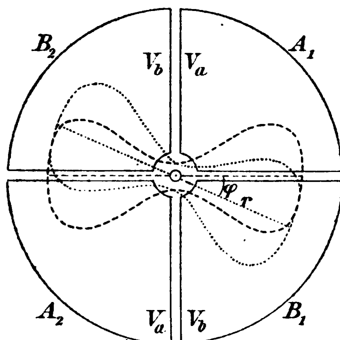


Fig. 69.

elektrischen Ladung auf der ganzen Nadel homogen ist. Das trifft allerdings nicht zu, denn am Rande ist eine größere Elektrizitätsmenge aufgespeichert. Doch macht das für unsere Rechnung nichts aus, da wir noch sehen werden, daß die Randpartien der Nadel ohne Einfluß auf die Drehung der Nadel sind.

Nennen wir die Gesamtfläche der Nadel $2F$, so befindet sich in der Nullstellung der Nadel die halbe Fläche innerhalb des Quadrantenpaares A, die andere Hälfte der Fläche innerhalb des Quadrantenpaares B. In der Nullstellung, die in der Figur gestrichelt gezeichnet ist, ist daher die Kapazität der in A befindlichen Nadelhälfte $F \cdot c$, die Kapazität der anderen Nadelhälfte ebenfalls $F \cdot c$. Für die in A befindliche Nadelhälfte kommt zur Berechnung der potentiellen Energie die Potentialdifferenz $V_A - V$, für die in B befindliche Hälfte die Potentialdifferenz $V_B - V$ zur Berechnung. Die gesamte potentielle Energie der Nadel ist also in der gestrichelt gezeichneten Nullstellung

$$E = \tfrac{1}{2} c F (V_A - V)^2 + \tfrac{1}{2} c F (V_B - V)^2 .$$

Hat sich nun die Nadel um den Winkel φ gedreht (punktiert gezeichnet), so ist ein Flächenstück von der Größe

$\frac{r^2 \varphi}{2}$ auf jeder Seite aus dem einen Quadrantenpaare in das andere übergetreten, wobei r die halbe Länge der Nadel bedeutet, so daß demnach in dem Quadrantenpaare A nur noch die Fläche $F - r^2 \varphi$ mit der Kapazität $c(F - r^2 \varphi)$, dagegen in dem Quadrantenpaare B die Fläche $F + r^2 \varphi$ mit der Kapazität $c(F + r^2 \varphi)$ steckt.

Berechnen wir jetzt die potentielle Energie E' der Nadel in der abgelenkten Stellung, so ist dieselbe

$$E' = \tfrac{1}{2} c(F - r^2 \varphi)(V_A - V)^2 + \tfrac{1}{2} c(F + r^2 \varphi)(V_B - V)^2 .$$

Durch die Drehung ist also eine Energieverminderung um den Betrag $E - E'$ eingetreten. Wir berechnen diesen Betrag

$$(5)\left\{\begin{aligned} & E - E' = \\ & = \tfrac{1}{2} c F (V_A - V)^2 + \tfrac{1}{2} c F (V_B - V)^2 - \\ & - \tfrac{1}{2} c(F - r^2 \varphi)(V_A - V)^2 - \tfrac{1}{2} c(F + r^2 \varphi)(V_B - V)^2 \\ & = \tfrac{1}{2} c r^2 \varphi (V_A - V)^2 - \tfrac{1}{2} c r^2 \varphi (V_B - V)^2 \\ & = \tfrac{1}{2} c r^2 \varphi (V_A^2 - 2 V V_A + V^2 - V_B^2 + 2 V V_B - V^2) \\ & = \tfrac{1}{2} c r^2 \varphi [V_A^2 - V_B^2 - 2 V (V_A - V_B)] \\ & = c r^2 \varphi (V_A - V_B)\left(\frac{V_A + V_B}{2} - V\right). \end{aligned}\right.$$

Diese Energieverminderung ist dazu gebraucht, die Aufhängung der Nadel um den Winkel φ zu tordieren. Das Torsionsmoment der Aufhängung ist dem Winkel φ direkt proportional, hat also eine Größe, die sich durch $\mathfrak{T} \cdot \varphi$ ausdrücken läßt. Die Torsionsenergie ist das Produkt aus der Kraft und dem Wege, und da letzterer bei der Drehung um den Winkel φ diesem ebenfalls proportional ist, so können wir die potentielle Energie des tordierten Drahtes in der Form schreiben

$$(6) \qquad E'' = f \varphi^2 ,$$

wo f ein Faktor ist, der von den Größen- und Elastizitätsverhältnissen des Apparates und der Aufhängung abhängt, der aber bei demselben Apparate konstant ist.

Die Gesamtenergie des Apparates ist durch die Drehung nicht verändert, folglich ist die Summe des elektrischen Energieverlustes und des elastischen Energiegewinnes gleich Null, d. h.

$$E'' + (E - E') = 0,$$

oder

$$E'' = -(E - E').$$

Setzen wir hier die Werte aus Gleichung (5) und (6) ein, so erhalten wir

$$f\varphi^2 = -c r^2 \varphi (V_A - V_B)\left(\frac{V_A + V_B}{2} - V\right),$$

woraus folgt

$$\varphi = \frac{c r^2}{f}(V_A - V_B)\left(V - \frac{V_A + V_B}{2}\right).$$

Hierin sind c, r^2 und f konstante Größen, die von der Kapazität der Flächeneinheit der Nadel, von dem Radius der Nadel und von der Aufhängung abhängen. Die beiden ersten Konstanten zeigen uns an, daß das Elektrometer um so empfindlicher ist, je größer die Kapazität der Flächeneinheit und der Radius der Nadel ist. Die Kapazität der Flächeneinheit ist in erster Linie bedingt durch den vertikalen Abstand der Nadel von den Quadranten. Je dichter die Grundflächen der Quadrantendose an der Nadel sind, je niedriger also die Dose ist, um so empfindlicher ist der Apparat. Die Vergrößerung von r hat gleichzeitig eine Vergrößerung des Gewichts der Nadel zur Folge. Dieses bedingt aber auch eine festere Aufhängung, also demnach eine Vergrößerung von f. Daher hat eine Vergrößerung der Nadel nur geringen praktischen Vorteil. Setzen wir für das Produkt $\frac{c r^2}{f}$ noch die Konstante k ein, so wird

$$(7) \qquad \varphi = k(V_A - V_B)\left(V - \frac{V_A + V_B}{2}\right).$$

Wenn das Potential V groß ist im Vergleich zu V_A und V_B, so kann man $\frac{V_A + V_B}{2}$ gegen V vernachlässigen. Ferner fällt $\frac{V_A + V_B}{2}$ fort, wenn man die beiden Potentiale

entgegengesetzt gleich groß macht, wenn also $V_A = - V_B$ wird. Für diese beiden besonderen Fälle nimmt der Ausdruck für φ die einfache Form an

$$\varphi = k (V_A - V_B) V. \tag{8}$$

Es ist der Ausschlag der Nadel der Potentialdifferenz $V_A - V_B$ und dem Potential V direkt proportional. Daraus folgt, daß man die Empfindlichkeit durch passende Wahl von V bis zu sehr großer Höhe treiben kann.

Es muß noch ergänzend die Begründung dafür angegeben werden, daß die Kapazität der Ränder der Nadel von nur geringem Einfluß auf die Bildung des Ausdruckes (5) ist. Die Kapazität der Ränder würde sowohl bei dem Ausdrucke für E, als für E' vorkommen, würde sich also bei dem Ausdrucke $E - E'$ wegheben, mit Ausnahme der kleinen Randpartien, die von einem zum anderen Quadrantenpaare übertreten. Denken wir uns diese Partien auf beiden Seiten ersetzt durch ein gleichmäßig belegtes größeres Flächenstück, dessen Gesamtkapazität der der Randpartien gleich ist, so würde das nur die Wirkung haben, daß das r in den beiden Ausdrücken etwas größer in Rechnung zu bringen ist, als es die direkte Ausmessung ergeben würde. In dem endgültigen Ausdrucke (7) würde dadurch der Faktor k einen etwas größeren Wert bekommen. Da man aber diesen Faktor k wohl nie durch Ausmessen der einzelnen Konstanten bestimmen wird, sondern durch Eichen des Apparates mit bekannten Potentialen, so ist der Einfluß der stärker geladenen Randpartien ohne Einfluß auf die Endformel.

Das Quadrantelektrometer kann in verschiedener Weise zum Messen von Potentialen benutzt werden, je nachdem man die Nadel oder die Quadranten auf das zu messende, auf ein bekanntes oder auf das Nullpotential der Erde bringt.

Man unterscheidet besonders drei Arten von Schaltungen:

1. Die Nadelschaltung:

Die Nadel wird durch irgend eine Elektrizitätsquelle auf ein bekanntes hohes Potential gebracht, und die beiden Quadranten werden mit den Körpern in Verbindung gebracht, deren Potentialdifferenz gemessen werden soll. Soll ein Potential seinem absoluten Werte nach gemessen werden,

so verbindet man das eine Quadrantenpaar A mit dem zu messenden Potential und leitet das andere Quadrantenpaar B zur Erde ab, bringt es also auf das Potential Null. Die Ablenkung beträgt dann

$$\varphi = k V_A (V - \tfrac{1}{2} V_A) .$$

Ist die Hilfsladung im Vergleich zum unbekannten Potential sehr groß, so daß man $\frac{V_a}{2}$ gegen V vernachlässigen kann, so wird

$$\varphi = k \cdot V \cdot V_A \quad \text{oder} \quad V_A = \frac{\varphi}{k \cdot V} .$$

Es ist also dann das zu messende Potential der Ablenkung direkt proportional und dem Hilfspotential umgekehrt proportional. Vertauscht man die beiden Quadranten, so daß also das Quadrantenpaar B mit dem zu messenden Potential verbunden wird und A zur Erde abgeleitet wird, so wird

$$\varphi = - k \cdot V \cdot V_B .$$

Die Ablenkung wird also entgegengesetzt gleich. Man hat hierdurch eine Kontrolle der Messung, kann aber auch bei ungleichen Ausschlägen durch Bildung des arithmetischen Mittels der Ausschläge etwaige Unsymmetrien im Apparate oder Beobachtungsfehler eliminieren.

Die Hilfsladung wird gewöhnlich dadurch hergestellt, daß man eine Batterie aus vielen kleinen galvanischen Elementen zusammenstellt, den einen Pol zur Erde ableitet und das freie Potential des anderen Pols als Hilfsladung verwendet.

W. Thomson wandte als Hilfsladung die Ladung einer Leidener Flasche an, die wegen ihrer hohen Kapazität das Potential nur sehr langsam ändert. Durch einen kleinen Hilfsapparat, den Replenisher, konnte er leicht eine Verminderung der Ladung der Leidener Flasche wieder beseitigen. Diese Art der Hilfsladung ist heute allgemein zugunsten der Hilfsladung durch eine vielzellige galvanische Batterie verlassen.

2. Die Quadrantschaltung:

Hierbei wird die Nadel auf das zu messende Potential gebracht. Die beiden Quadrantenpaare werden mit den

Polen einer Spannungsbatterie aus vielen kleinen galvanischen Elementen verbunden. Leitet man die Mitte der Spannungsbatterie zur Erde ab, so wird $V_A = -V_B$, also $V_A + V_B = 0$ und $V_A - V_B = 2V_a$, folglich wird der Ausschlag

$$\varphi = 2V \cdot V_A, \quad \text{also} \quad V = \frac{\varphi}{2V_A}.$$

Hier ist V das zu messende Potential. Dasselbe ist wieder dem Ausschlage direkt proportional. Man kann bei dieser Schaltung einen Ausschlag nach der entgegengesetzten Seite dadurch erhalten, daß man die Pole der Spannungsbatterie miteinander vertauscht.

3. Die Doppelschaltung:

Das eine Quadrantenpaar (B) wird zur Erde abgeleitet während die Nadel mit dem anderen Paare (A) verbunden' wird. Dann verbindet man den in bezug auf sein Potential zu untersuchenden Körper mit der Nadel, also auch mit dem Quadrantenpaare A. Der Ausschlag wird jetzt, da $V_B = 0$ und $V_A = V$ ist,

$$\begin{aligned} \varphi &= k \cdot V\left(V - \frac{V}{2}\right) \\ &= k \cdot \frac{V^2}{2}, \end{aligned}$$

folglich

$$V = \sqrt{\frac{2\varphi}{k}}.$$

Der Ausschlag wächst also proportional dem Quadrate des zu messenden Potentials, das Potential ist der Quadratwurzel aus dem Ausschlage proportional.

§ 62. Messung des Potentials und der elektrischen Ladung eines Leiters.

Die Messung des Potentials eines Leiters gestaltet sich sehr einfach, wenn auf irgend eine Weise das Potential des Leiters konstant erhalten wird, wenn also z. B. der Leiter in Verbindung mit dem einen Pol einer galvanischen Batterie steht, die dafür sorgt, daß auch dann, wenn ein Teil der

elektrischen Ladung vom Leiter entfernt wird, durch neue Zufuhr von Elektrizität das ursprüngliche Potential wieder hergestellt wird. Man braucht nur den Leiter durch einen Draht mit dem Elektrometer zu verbinden. Das durch das Elektrometer bestimmte Potential ist dann auch das Potential des Leiters.

Wenn dagegen der Leiter isoliert von jeder Zufuhr der Elektrizität ist, so wird bei Verbindung des Elektrometers mit dem Leiter ein Teil der Ladung vom Leiter zum Elektrometer überfließen. Dadurch wird die Ladungsmenge auf dem Leiter vermindert, also das Potential erniedrigt. Man mißt nur das durch die Verbindung mit dem Elektrometer erniedrigte Potential.

Die Menge der vom Leiter auf das Elektrometer überfließenden Elektrizität hängt von der Kapazität des Elektrometers oder richtiger von dem Verhältnis der Kapazität des Elektrometers zu der Kapazität des Leiters ab.

Beträgt die Kapazität des Leiters C_1, die des Elektrometers C_2, und ist das Potential des Leiters V, so ist die Menge der auf dem Leiter befindlichen Ladung $e = C_1 V$. Man verbindet nun das Elektrometer mit dem Leiter. Hierbei möge erstens angenommen werden, daß der Verbindungsdraht kapazitätsfrei sei, d. h. daß seine Kapazität gegenüber C_1 und C_2 vernachlässigt werden kann, wozu man bei einem dünnen Draht nach § 53 berechtigt ist; zweitens möge die Voraussetzung gemacht werden, daß die elektrischen Kraftfelder des Leiters und des Elektrometers sich nicht gegenseitig stören. Es verteilt sich nun die elektrische Ladung e auf die beiden Kapazitäten C_1 und C_2. Es entsteht dadurch das niedrigere Potential V'. Jetzt ist $e = (C_1 + C_2) V'$. Die beiden Ausdrücke für e setzen wir gleich und erhalten

$$C_1 \cdot V = (C_1 + C_2) V'.$$

Hieraus folgt

$$V = \frac{C_1 + C_2}{C_1} \cdot V'. \tag{1}$$

Am Elektrometer liest man V' ab. Das ursprüngliche Potential V, das gemessen werden sollte, wird dann gefunden

indem man V' mit dem Quotienten $\frac{C_1 + C_2}{C_1}$ multipliziert. Schreiben wir Gleichung (1) folgendermaßen

$$V = \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) V',$$

so erkennen wir, daß wir, im Falle C_1 gegen C_2 sehr groß ist, im Falle also der Wert des Quotienten $\frac{C_2}{C_1}$ sehr klein wird, den zweiten Teil des Klammerausdrucks vernachlässigen können. Daraus folgt, daß es im allgemeinen erwünscht ist, solche Elektrometer zu verwenden, die nur eine sehr kleine Kapazität haben.

Haben wir auf die angegebene Weise das Potential V des Leiters bestimmt, so können wir auch die Ladungsmenge berechnen, wenn wir die Kapazität C_1 des Leiters kennen. Es ist einfach

$$e = C_1 V .$$

Kennen wir die Kapazität des Leiters aber nicht, so läßt sich die Ladungsmenge noch auf eine andere Weise bestimmen. Wir verbinden das Elektrometer, dessen Kapazität C_2 bekannt sein muß, mit einem Hohlkörper von ebenfalls bekannter Kapazität C_3, z. B. mit einer Hohlkugel von bekanntem Radius. Die Länge des Radius der Hohlkugel in Zentimeter gemessen ist ja gleich seiner Kapazität. Das einfachste ist, daß wir auf das Elektrometer unmittelbar den Hohlkörper aufsetzen. Es möge die Kapazität vom Elektrometer einschließlich Hohlkörper C' sein.

Führen wir jetzt den Leiter mit der zu messenden Elektrizitätsmenge $+e$ in den Hohlkörper ein, so wissen wir nach § 56, daß auf der Innenseite des Hohlkörpers eine ebenso große Influenzladung negativer Elektrizität, also $-e$ influenziert, auf der Außenseite also die Menge $+e$ influenziert wird. Das Elektrometer zeigt einen Ausschlag, aus dessen Größe wir das Potential V ablesen können. Da wieder $e = C' V$ ist, und da wir C' und V kennen, so kennen wir also auch die gesuchte Elektrizitätsmenge e.

Durch eine kombinierte Bestimmung können wir jetzt auch die Kapazität C_1 des Leiters bestimmen. Denn ver-

binden wir den Leiter durch einen kapazitätsfreien Draht wieder mit dem Elektrometer, so verteilt sich die Ladung wieder auf die Kapazitäten C' und C_1. Dadurch sinkt das Potential auf den Betrag V''. Es ist

$$e = (C' + C_1) V''.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich demnach auch die Kapazität C_1 des Leiters bestimmen, da alle übrigen Größen in der Gleichung bekannt sind.

Zur Bestimmung der Kapazität C' eines mit einem Hohlkörper verbundenen Elektrometers, das eine auf irgend eine Weise geeichte Potentialskala trägt, kann folgendes Verfahren dienen:

Mit Hilfe einer leitenden Kugel, deren Radius in Zentimetern man direkt ausmessen kann, deren Kapazität C demnach bekannt ist, führt man dem Elektrometer eine beliebige Elektrizitätsmenge e durch Einführen der Kugel in den Hohlkörper zu. Hierbei ist es gleichgültig, ob die Kugel den Hohlkörper von innen berührt oder nicht. Dadurch entsteht das Potential V_1. Es ist

$$e = C' V_1 .$$

Jetzt nimmt man die Kugel wieder aus dem Hohlkörper heraus und verbindet sie mittels eines kapazitätsfreien Drahtes von außen mit dem Elektrometer in einem so weit entfernten Punkte, daß die elektrischen Felder vom Elektrometer und von der Kugel sich nicht stören. Die noch unveränderte Ladung e verteilt sich auf die beiden Kapazitäten C und C'. Das hierdurch entstehende Potential V_2 wird am Elektrometer bestimmt. Jetzt ist

$$e = (C + C') V_2 .$$

Durch Gleichsetzen der beiden Werte für e erhält man

$$C' V_1 = (C + C') V_2 .$$

Hieraus berechnet sich die gesuchte Kapazität

$$C' = \frac{C V_2}{V_1 - V_2} .$$

§ 63. Messung des Potentials in einem Punkte des elektrischen Kraftfeldes.

Hat ein Punkt P eines elektrostatischen Kraftfeldes das Potential V, so wird ein kleiner leitender Körper, z. B. eine kleine Kugel oder ein kleines Scheibchen, das an einem isolierenden Handgriffe in dem Punkte P festgehalten wird, auch das Potential V haben, wenn es selbst unelektrisch ist. Denn die Arbeit, die notwendig ist, um eine elektrostatische Einheit aus dem Unendlichen in den Punkt P zu bringen, muß unabhängig von der Anwesenheit oder Abwesenheit des kleinen Körpers sein. Nehmen wir an, der kleine Körper, den wir in Zukunft den „Probekörper" nennen wollen, hätte an der Stelle P ein anderes Potential, als seine unmittelbare Umgebung hat, es existierte also zwischen ihm und seiner unmittelbaren Umgebung eine Niveaudifferenz, so existierte auch eine Normalkraft an seiner Oberfläche. Die Normalkraft können wir ausdrücken durch $K_n = 4\pi\varrho$, also wäre $\varrho = \frac{K_n}{4\pi}$. Es müßte also eine gewisse Oberflächendichte der elektrischen Ladung vorhanden sein, d. h. der Probekörper müßte selbst geladen sein, was unserer Voraussetzung, daß der Probekörper unelektrisch ist, widerspricht.

Hat der Probekörper eine beträchtliche Größe, so reicht er mit seinen einzelnen Teilen in verschiedene Potentialgebiete. Infolge seiner Leitfähigkeit gleichen sich die Potentiale seiner einzelnen Punkte aus, daher besteht zwischen einigen seiner Oberflächenpunkte und der Umgebung eine Potentialdifferenz, d. h. es treten oberflächliche Ladungen an einzelnen Stellen auf. Wir erhalten dann eine Influenzwirkung. Der Körper nimmt ein Durchschnittspotential des Gebietes an, in dem er sich befindet.

Wollen wir also das Potential eines Punktes mit Hilfe eines Probekörpers bestimmen, so müssen wir den Probekörper sehr klein nehmen und zwar um so kleiner, je größer das Potentialgefälle in dem untersuchten Gebiete des Kraftfeldes ist. Bringen wir jetzt den Probekörper aus dem Felde wieder heraus, so ist er natürlich nach wie vor unelektrisch und hat nun das Potential Null.

Wenn wir aber den Probekörper in dem Augenblicke, in dem er im Punkte P ist, durch einen dünnen kapazitätsfreien Draht mit der Erde verbinden, also ableitend berühren, so nimmt er durch Leitung das Nullpotential an. Jetzt besteht zwischen ihm und der Umgebung die Potentialdifferenz $V - 0 = V$. Er ist geladen mit einer gewissen Elektrizitätsmenge e von negativem Vorzeichen, wenn der untersuchte Punkt einen positiven Potentialwert besaß. Sein Nullpotential wird zusammengesetzt durch das positive Potential $+V$ des Feldes und durch das durch seine Eigenladung $-e$ erzeugte negative Potential V'. Da er aber infolge seiner Verbindung mit der Erde das Potential Null hat, so ergibt sich

$$V + V' = 0\,,$$

also ist das durch seine Eigenladung erzeugte Potential

$$V' = -V\,.$$

Jetzt lösen wir seine Verbindung mit der Erde, isolieren ihn also wieder, während er noch an demselben Punkte P ist und bringen ihn aus dem Felde heraus. Die Eigenladung $-e$ oder das durch seine Eigenladung erzeugte Potential $-V$ können wir dann nach einer der Methoden des vorigen Paragraphen mit dem Elektrometer bestimmen.

Die Ausführung der Potentialbestimmung der Punkte eines Feldes, also die Untersuchung des Feldes gestaltet sich am einfachsten folgendermaßen:

1. Es soll beispielsweise nachgewiesen werden, daß das Potential einer punktförmigen Ladung durch den Ausdruck $\frac{e}{r}$ bestimmt ist.

Statt der punktförmigen Ladung können wir die Ladung einer Kugel nach § 8 benutzen. Wir benutzen eine Kugel von 5 cm Radius und laden sie mit einer beliebigen Elektrizitätsmenge $+e$.

Für die praktische Ausführung dieser Ladung ist es empfehlenswert, die Ladung nicht durch eine in demselben Zimmer aufgestellte Elektrisiermaschine auszuführen, sondern in einem Nebenraume eine Leidener Flasche auf ein hohes Potential zu laden und nun diesen infolge der hohen Kapazität der Leidener Flasche großen Vorrat an elektrischer

Ladung für die Ladung der Kugel zu benutzen. Wenn man nämlich in einem Zimmer mit der Elektrisiermaschine arbeitet, so treten infolge der großen Mengen von elektrischen Ladungen, die beim Drehen der Elektrisiermaschine erzeugt werden, eine große Zahl unkontrollierbarer Störungen auf. Ferner tritt eine unter Umständen beträchtliche Ionisierung der Luft auf, die die Luft so leitfähig macht, daß jeder Versuch, einen Körper isoliert aufzustellen, scheitert. Auch vermeide man bei diesem Versuche die Anwesenheit offener Flammen im Zimmer. Eine nur wenige Minuten brennende Stearinkerze vermag die Isolierfähigkeit der Luft so zu verschlechtern, daß kein elektrostatischer Versuch mehr gelingt. Ob in diesem Falle die Verbrennungsprodukte der Kerze direkt, ob die bei der Verbrennung der Kerze auftretende Ionisierung der Luft schuld an der mangelhaften Isolierfähigkeit der Luft ist, mag noch als unentschieden hingestellt werden. Auffallend ist, daß man alle elektrostatischen Versuche dadurch zum Scheitern bringen kann. daß man einige Züge einer brennenden Zigarre in dem Arbeitszimmer raucht. Es gelingt gewöhnlich, die Isolierfähigkeit der Luft wieder herzustellen, wenn man durch einen starken Luftzug durch Öffnen von Tür und Fenster die alte Luft des Zimmers durch frische ersetzt. Die Feuchtigkeit der Luft schadet den elektrostatischen Versuchen gar nichts.

Man lädt also unter Benutzung einer geladenen Leidener Flasche eine auf einem hohen Hartgummistabe (1 m hoch) isoliert aufgestellte Kugel von 5 cm Radius auf ein beliebig hohes Potential. Dann stellt man unmittelbar neben diese Kugel eine kleine Probekugel von beispielsweise 5 mm Radius auf einer ebenso hohen Hartgummisäule auf und markiert auf dem Tisch den Stand des Fußes, in dem die Hartgummisäule der Probekugel befestigt ist. Dann zeichnet man auf den Tisch in der Entfernung 5 cm von dem eben markierten Striche einen zweiten mit 10 bezeichneten Strich und fährt so von 5 zu 5 cm weiter fort. Man kann dann die Entfernung der Probekugel von der elektrischen Ladung auf dem Tische ablesen. Ferner braucht man einen langen dünnen Draht. Um denselben steif halten zu können, ohne selbst mit seinem eigenen Körper in dem elektrischen Felde zu sein, wodurch dasselbe ja wesentlich gestört ist, benutzt man zweckmäßig einen recht dünnen Kupferdraht, den man

mit einigen dünnen Seidenfäden an eine ca. 1 m lange dünne Hartgummistange der Länge nach fest bindet, doch so, daß das eine Ende des Kupferdrahtes noch einige Zentimeter über das freie Ende des Hartgummistabes herausragt, damit man hiermit die Probekugel berühren kann ohne fürchten zu müssen, daß man die Probekugel verschiebt, denn bei unsanfter Berührung biegt sich nur der dünne Kupferdraht.

Endlich braucht man noch ein empfindliches Elektrometer mit aufgesetztem Hohlkörper; z. B. das Elektrometer Figur 65, auf welches statt der Klemmschraube ein Hohlzylinder oder eine Hohlkugel mit oberer Öffnung bequem aufgesetzt werden kann. Das Elektrometer braucht das Potential nicht unmittelbar seinem absoluten Werte nach anzugeben. Es genügt die Gradskala.

Es muß natürlich während der Versuche weit vom geladenen Körper entfernt, also außerhalb des elektrischen Feldes aufgestellt werden.

Der Versuch selbst verläuft folgendermaßen: Man stellt neben die geladene große Kugel in der Entfernung von 10 cm die Probekugel auf, berührt sie ableitend mit dem dünnen Draht, den man dann wieder fortnimmt und bringt die Probekugel, die jetzt negativ geladen ist, in den auf das Elektrometer gesetzten Hohlzylinder. Hier gibt die Probekugel ihre gesamte Ladung an den Hohlzylinder ab. Das Elektrometer zeigt durch einen bestimmten Ausschlag ein bestimmtes Potential an.

Eine Wiederholung desselben Versuchs überzeugt uns, ob dasselbe Resultat wieder sich ergibt. Das ist besonders ein Zeichen dafür, daß die geladene Kugel, der Konduktor, gut isoliert aufgestellt war, daß er also keine Ladung verloren hat.

Jetzt machen wir den Versuch in genau derselben Weise, aber während die Probekugel in der Entfernung 20 cm sich befindet. Der Ausschlag des Elektrometers ist geringer, also auch das Potential geringer. Ohne das Elektrometer zu entladen, führen wir denselben Versuch noch einmal aus und bringen die durch Influenz geladene Probekugel in den Hohlkörper des schon einmal geladenen Elektrometers. Die Probekugel gibt ihre Ladung wieder vollständig an das Elektrometer ab; der Ausschlag des Elektrometers wird vergrößert und erreicht jetzt nach zweimaliger Ladung genau

die Höhe, welche er hatte, als der Versuch bei 10 cm Abstand einmal ausgeführt, also das Elektrometer nur einmal geladen wurde.

Machen wir den Versuch in 30 cm Entfernung, so bringt eine dreimalige Ladung denselben Ausschlag hervor. So läßt sich der Versuch beliebig oft wiederholen. Sorgt man durch genügende Reinigung der isolierenden Hartgummistäbe und durch Lüftung des Zimmers für tadellose Isolation des Konduktors, so kann man den Versuch noch bei 1 m Entfernung mit vollkommener Übereinstimmung mit dem Ausdrucke $V = \frac{e}{r}$ ausführen.

In ähnlicher Weise kann man natürlich auch andere elektrostatische Felder, die von zwei oder mehr Ladungen herrühren, untersuchen.

Bequem ist bei der beschriebenen Versuchsanordnung, daß man hier mit jedem beliebigen ungeeichten einfachen Elektroskop auskommt. Unbequem ist es, denselben Versuch bei größerer Entfernung mehrmals auszuführen. Das bedeutet immer einen großen Zeitaufwand.

Aus diesem Grunde mag noch eine zweite Methode der Untersuchung elektrostatischer Kraftfelder angegeben werden:

2. Man verbindet die Probekugel dauernd mit dem Elektrometer.

Beträgt die Kapazität der Probekugel C_1, die des Elektrometers C_2; befindet sich ferner die Probekugel an dem Punkte P mit dem Potential V, und ist das Elektrometer außerhalb des elektrischen Feldes, also dort, wo das Potential Null herrscht, aufgestellt, so hat bei unverbundenen Körpern die Probekugel selbst das Potential V, das Elektrometer das Potential Null. Bei leitender Verbindung der beiden Körper findet eine Bewegung positiver Elektrizität $+e_1$ von der Probekugel nach dem Elektrometer statt, während die Probekugel selbst die Ladung $-e_1$ behält. Es entsteht auf den verbundenen Körpern das Potential V', welches natürlich kleiner als V ist. Dieses Potential kann man am Elektrometer ablesen. Man muß jetzt noch aus dem bekannten Potential V' und den bekannten Kapazitäten C_1 und C_2 das zu bestimmende Potential V berechnen.

Wir wollen zu dem Zwecke annehmen, daß zu Beginn des Versuches die leitende Verbindung von Probekugel und Elektrometer noch nicht existierte, so hatte die Probekugel das Potential V des untersuchten Punktes. Da die Kapazität der Probekugel C_1 beträgt, so ist die Menge der verfügbaren Elektrizität der Probekugel $V C_1$. Die auf dem Elektrometer verfügbare Elektrizität ist $0 \cdot C_2$, da das Potential des Elektrometers gleich Null, seine Kapazität C_2 ist. Wird jetzt die leitende Verbindung hergestellt, so nehmen beide Körper das am Elektrometer ablesbare Potential V' an, daher beträgt jetzt die Elektrizitätsmenge auf der Probekugel $V' C_1$ und auf dem Elektrometer $V' C_2$. Da aber infolge des Ausgleichs die gesamte Elektrizitätsmenge, welche vor der leitenden Verbindung vorhanden war, der Elektrizitätsmenge nach der Verbindung gleich ist, so muß sein

$$V \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 = V' C_1 + V' C_2 .$$

Hieraus folgt

$$(1) \qquad V = V' \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1} = V' \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Der Bruch $\frac{C_2}{C_1}$ ist um so größer, je größer C_2 im Vergleich zu C_1 ist. Je größer also die Kapazität des Elektrometers im Vergleich zu der der Probekugel ist, um so größer ist der Faktor, mit dem der abgelesene Potentialwert C' multipliziert werden muß, um den wahren Potentialwert C zu erhalten, desto weniger genau werden demnach auch die Messungen. Es ist daher wünschenswert, diese Art der Messung des elektrischen Feldes nur mit einem Elektrometer möglichst geringer Kapazität auszuführen. Das Verhältnis $V : V'$ bleibt bei Benutzung derselben Probekugel und desselben Elektrometers unverändert. Handelt es sich also nur um die Untersuchung der Art des elektrischen Feldes und nicht um die Bestimmung der absoluten Größe der Potentialwerte, so liefert diese Methode, die bequem ausführbar ist, brauchbare Resultate. Allerdings ist zu bemerken, daß die Anwesenheit des Verbindungsdrahtes zwischen Probekugel und Elektrometer immer eine geringe Deformation des Feldes zur Folge hat.

3. Man kann mittels der zweiten Methode den beobachteten Potentialwert V' dem wahren Potentialwerte um so näher bringen, je größer man C_1 im Vergleich zu C_2 wählt. Man könnte also durch Vergrößerung der Kapazität der Probekugel dieses Ziel erreichen, wenn nicht eine Vergrößerung der Kapazität auch eine Vergrößerung der räumlichen Ausdehnung derselben und daher eine Deformation des Feldes zur Folge hätte. Doch führen auch hier zwei Wege zu einer Verminderung dieser Fehlerquelle.

Wir haben in der Leidener Flasche einen Körper kennen gelernt, der bei kleinen Dimensionen eine große Kapazität besitzt. Wir können daher als Probekörper eine kleine Leidener Flasche anwenden. Als solche eignen sich kleine hohle Glaskugeln, wie sie als Tannenbaumschmuck Verwendung finden. Die Versilberung dieser Tannenbaumkugeln bildet die innere Belegung der Leidener Flasche, in welche man mit Siegellack einen dünnen Draht einkittet, die zweite Öffnung kann man an der Gebläseflamme leicht zuschmelzen oder auch mit Siegellack verkitten. Die äußere Belegung wird nun mit Hilfe eines Glasversilberungsverfahrens ebenfalls versilbert oder einfach mit dünnem Lack bestrichen, der noch, bevor er völlig trocken ist, mit dünner Metallfolie, z. B. Aluminiumfolie belegt wird. Diese kleinen Kugeln bilden sehr brauchbare Probekugeln mit kleinen Dimensionen und hoher Kapazität. So hatte z. B. eine solche Kugel mit 0,5 cm Radius, deren Wandungsdicke nach dem Zertrümmern derselben zu 0,1 mm = 0,01 cm bestimmt wurde, nach § 57, Gleichung (8) die Kapazität

$$C''' = \frac{r^2}{d} = \frac{0{,}5^2}{0{,}01} = 25\,,$$

wenn die isolierende Zwischenschicht Luft wäre. Da dieselbe aber aus Glas mit der Dielektrizitätskonstante $\varkappa = 5$ bestand, so ergibt sich für die Kapazität

$$C = 25\,\varkappa = 125\,.$$

Eine ebenso große einfache leitende Kugel hätte die Kapazität 0,5 gehabt. Also war die Kapazität der benutzten kleinen Leidener Flasche 250mal so groß, wie die der ebenso großen Metallkugel. Eine einfache metallene Probekugel von der Kapazität der kleinen Leidener Flasche hätte den Radius

von 125 cm haben müssen. Eine solche Kugel kann als Probekugel natürlich nicht verwandt werden.

4. Ein weiteres Verfahren, um den Übelstand der kleinen Kapazität der Probekugel zu beseitigen, besteht in der Anwendung sogenannter Tropfkollektoren. Man füllt die hohle Probekugel mit Wasser und läßt das Wasser, während sich die Probekugel im elektrischen Felde befindet, tropfenweise austreten. Jeder einzelne Wassertropfen führt einen Teil der auf der Probekugel befindlichen Influenzladung fort und zwar so lange, bis das Potential der Probekugel und daher auch das des damit verbundenen Elektrometers mit dem Potential des Punktes übereinstimmt, in dem sich die Probekugel befindet.

Dieses Verfahren findet besonders Anwendung bei der Untersuchung des Potentials des elektrischen Feldes der Erde. Man kann hier der Probekugel schon ziemlich beträchtliche Dimensionen geben, so daß sie einen großen Wasserbehälter darstellt, aus dem eine große Zahl von Wassertropfen zum Ausgleich des Potentials herausfließen kann.

Für das Laboratorium empfiehlt sich die Benutzung von Metallfeilspänen zum Füllen der kleinen Probekugeln. Füllt man eine kleine Probekugel von z. B. 1 cm Radius mit Wasser und dreht man die mit einem kleinen Loch (oder auch mit zwei Löchern, um den Luftdruck beim Ausfließen auszugleichen) versehene Kugel um, so daß das Loch nach unten kommt, so fließt gewöhnlich gar kein oder höchstens einige Tropfen aus der Kugel aus infolge der Oberflächenspannung des Wassers an der Austrittsöffnung. Füllt man aber die Probekugel mit feinen Messingfeilspänen, so entleert sich die Kugel beim Umdrehen ganz allmählich bis auf einen ganz verschwindend kleinen Rest, der aber auch noch herausfällt, wenn man die Handhabe oder das Stativ der Probekugel ein klein wenig erschüttert.

5. Man wendet für Untersuchung des elektrischen Feldes der Erde auch noch Flammenkollektoren an, indem man die Probekugel ersetzt durch eine kleine Kerze, in deren Flamme ein dünner mit dem Elektrometer verbundener Draht führt. Hierbei ist aber der Punkt, dessen Potential bestimmt wird, schwer festzustellen. Dazu kommt noch, daß bei Laboratoriums- oder Vorlesungsversuchen dieses Verfahren nicht anwendbar ist, weil durch die brennende Kerze die Luft

leitend wird und innerhalb weniger Sekunden auch alle Ladung von dem Konduktor entführt, dessen Feld man untersuchen will.

6. Endlich hat man statt der Probekugeln Spuren von radioaktiven Körpern verwandt, um das Potential des elektrischen Feldes zu untersuchen. Auch dieses Verfahren ist für Laboratoriumsversuche unbrauchbar, weil die Anwesenheit radioaktiver Körper im Versuchsraume die sichere Ausführung der elektrostatischen Versuche wegen der eintretenden Ionisierung der Luft illusorisch macht.

§ 64. Darstellung des Verlaufs der Kraftlinien im elektrostatischen Kraftfelde.

Wenn man in ein elektrostatisches Feld einen leitenden Körper einführt, so wird infolge der vorhandenen Potentialdifferenz der einzelnen Punkte des Feldes die Potentialdifferenz des Leiters in bekannter Weise ausgeglichen und es entsteht auf der Seite, welche dem Konduktor, von dem das elektrische Feld erregt wird, zugewandt ist, eine elektrische Ladung, welche der des Konduktors entgegengesetzt ist. Auf der abgewandten Seite entsteht eine gleichnamige Ladung. Wir haben diesen Vorgang Influenz genannt. Wir wollen wieder annehmen, daß der Konduktor positiv geladen ist. So entsteht auf der zugewandten Seite negative, auf der abgewandten Seite positive Influenzladung.

Infolge dieser Influenzladung, deren Größe $-\mu$ und $+\mu$ sein mag, treten anziehende und abstoßende Kräfte auf. Nennen wir die mittlere Entfernung des Konduktors $+e$ von der negativen Influenzladung r_1 und die von der positiven Influenzladung r_2, so wirkt auf den Körper die anziehende Kraft $-\frac{e\mu}{r_1^2}$ und die abstoßende Kraft $+\frac{e\mu}{r_2^2}$.

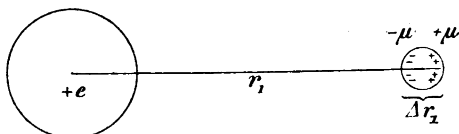


Fig. 70.

Wenn nun, wie in Figur 70 angenommen, der eingeführte leitende Körper eine Kugel ist, so stimmt offenbar

die Richtung von r_1 mit der von r_2 überein und die Resultante R der eben berechneten Kräfte ist gleich der Differenz der Kräfte, also

$$R = -\frac{e\mu}{r_1^2} + \frac{e\mu}{r_2^2}$$
$$= -\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2}\right).$$

Ist der eingeführte Körper nur klein, so wird r_1 von r_2 nur wenig verschieden sein. Wir können dann schreiben

$$r_2 = r_1 + \Delta r_1 .$$

Es wird also

$$R = -e\mu \frac{2 r_1 \Delta r_1}{r_1^2 (r_1 + \Delta r_1)^2} .$$

Im Nenner können wir, wenn Δr_1 sehr klein ist im Vergleich zu r_1 statt $r_1 + \Delta r_1$ einfach r_1 schreiben. Dann wird also mit Fortlassung des Index

(1) $$R = -2 e\mu \frac{\Delta r}{r^3} .$$

Die durch Influenz geschiedene Elektrizitätsmenge ist offenbar der an ihren Plätzen herrschenden Potentialdifferenz proportional. Die Potentialdifferenz ist

$$V_r - V_{(r+\Delta r)} = \frac{e}{r} - \frac{e}{r + \Delta r} = \frac{e\Delta r}{r^2},$$

wenn wir wieder im Nenner des entwickelten Ausdrucks statt $r + \Delta r$ einfach r setzen. Bezeichnet nun noch c eine von der Form und der Größe des eingeführten Leiters abhängige Konstante, so wird

(2) $$\mu = c(V_r - V_{r+\Delta r}) = c \cdot \frac{e\Delta r}{r^2} .$$

Dieser Wert wird in Gleichung (1) eingesetzt. So wird

(3) $$R = -2c \cdot \frac{e^2 \Delta r^2}{r^5} .$$

Die Anziehungskraft ist also dem Quadrat der Ladung e des Konduktors direkt, der fünften Potenz der Entfernung umgekehrt proportional. Sie hängt außerdem ab von der Größe des anziehenden Körpers und ist im allgemeinen dem Quadrat des Radius der angezogenen Kugel proportional.

Dieser Anziehung werden die Körper nur dann folgen können, wenn sie sehr leicht sind oder wenn sie sehr leicht beweglich befestigt, also z. B. aufgehängt sind. Bei einfacher Lagerung auf dem Tische oder z. B. einer Glasplatte wird die Reibung der Körper so groß sein, daß sie einer aus größerer Entfernung wirkenden, also nach Gleichung (1) nur sehr kleinen Anziehung nicht folgen werden.

Man kann die leichte Beweglichkeit auch dadurch herstellen, daß man die kleinen leichten Körper in eine Flüssigkeit bringt, die nahezu dasselbe spezifische Gewicht wie die Körper haben. Man stellt also eine sogenannte Suspension her. Die Flüssigkeit, in der die Körper suspendiert sind, muß natürlich ein Isolator sein. In einer solchen Suspension können die Körper der Anziehung folgen, werden dieses aber nur sehr langsam tun, weil sie den inneren Reibungswiderstand der Flüssigkeit noch zu überwinden haben. Die Verhältnisse gestalten sich etwas anders, wenn der leichte Körper keine Kugelform hat.

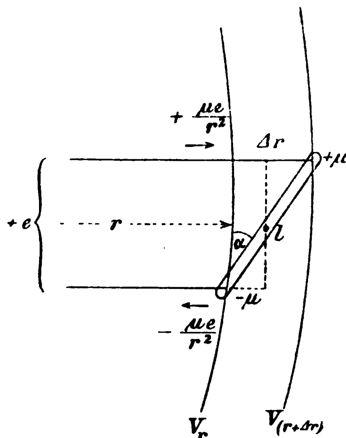


Fig. 71.

Um einen Überblick über die dann stattfindenden Kräfte und ihre Wirkungen zu haben, nehmen wir an, der Körper sei ein kleines Stäbchen von der Länge l. Er sei (Fig. 71) so gelagert, daß er mit der Richtung der von $+e$ kommenden Kraftlinien (wo e in der sehr großen, in der Figur abgekürzt gezeichneten Entfernung r vom Stäbchen sich befindet) einen Winkel bildet. In Figur 71 sind noch die beiden Potentialniveauflächen gezeichnet, die durch die Mitten der an den beiden Enden auftretenden Influenzladungen gehen.

Dieselben sind V_r und $V_{(r+\Delta r)}$. Das Stäbchen bildet mit diesen Niveauflächen den Winkel α.

Auf die Influenzladung $+\mu$ wirkt die abstoßende Kraft $\frac{e\,\mu}{(r+\Delta r)^2}$, wofür wir auch wegen der Kleinheit von Δr gegenüber r schreiben können $\frac{e\,\mu}{r^2}$. Auf die negative Influenzladung wirkt die anziehende Kraft $-\frac{e\,\mu}{r^2}$. Diese beiden Kräfte rufen ein Drehmoment hervor, dessen Arm $l \cdot \cos\alpha$ ist (wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß die Influenzladung ganz an den Enden des Stäbchens auftritt, oder wobei wir als Stäbchenlänge nur den Abstand der beiden Influenzladungen rechnen). Das Drehmoment ist

$$D = \frac{e\,\mu}{r^2} \cdot l \cos\alpha\,. \tag{4}$$

Hier ist wieder μ proportional der Potentialdifferenz, wir können also auch hier wieder den schon in Gleichung (2) ausgedrückten Wert für μ einsetzen, nämlich

$$\mu = c \cdot \frac{e\,\Delta r}{r^2}\,,$$

und erhalten so

$$D = c \cdot \frac{e^2\,\Delta r}{r^4} \cdot l \cos\alpha\,.$$

Nun ergibt sich aus der Figur sofort

$$\Delta r = l \cdot \sin\alpha\,,$$

also wird

$$D = c \cdot \frac{e^2\,l^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{r^4}\,.$$

Da aber

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

ist, wird endlich

$$D = \frac{c}{2} \cdot \frac{e^2\,l^2}{r^4} \cdot \sin 2\alpha\,. \tag{5}$$

Das Drehmoment ist ebenso wie die vorher durch Gleichung (3) berechnete Anziehungskraft dem Quadrate der anziehenden Elektrizitätsmenge und dem Quadrate der Länge direkt proportional. Dagegen ist das Drehmoment der vierten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional. Hieraus folgt, daß das Teilchen in bedeutend höherem Maße zu einer Drehung veranlaßt wird, als zu einer Vorwärtsbewegung. Dazu kommt noch, daß in einer Suspension ein solch leichtes Teilchen bei der Drehung einen geringeren Reibungswiderstand der Flüssigkeit zu überwinden hat als bei einer Vorwärtsbewegung. Wird daher ein leichtes längliches Teilchen in ein elektrostatisches Feld in eine Suspension gebracht, so wird es leicht eine Drehung ausführen.

Das Drehungsmoment hängt ferner noch ab von $\sin 2\alpha$. Dieser Ausdruck hat seinen größten Wert für $\alpha = 45^0$. Der Wert dieses Faktors wird Null für $\alpha = 0$ und für $\alpha = 90^0$. Das ist auch verständlich, denn für $\alpha = 0$ liegt das ganze Teilchen in derselben Potentialniveaufläche, daher wird gar keine Influenzladung auftreten. Für $\alpha = 90^0$ liegt das Teilchen in der Richtung der Kraftlinien. Es hat die Endlage der Drehung erreicht. Diese Lage $\alpha = 90^0$ ist eine stabile Gleichgewichtslage, denn für diesen Wert wird

$$\left(\frac{d \sin 2\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha = 90^0} = (2 \cos 2\alpha)_{\alpha = 90^0} = -2\,,$$

also negativ, während für $\alpha = 0$

$$\left(\frac{d \sin 2\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha = 0} = (2 \cos 2\alpha)_{\alpha = 0} = +2$$

wird. Das erscheint bei Betrachtung der Figur 71 ebenfalls als selbstverständlich.

Die im vorstehenden ausgeführte Rechnung ergibt, daß wenn in einer Suspension kleine Körperchen aufgeschlemmt sind, die annähernd Stäbchenform haben, und wenn man diese Suspension in ein elektrostatisches Feld bringt, infolge der auftretenden Drehmomente die Stäbchen sich in der Richtung der Kraftlinien drehen werden.

Hiermit haben wir ein bequemes Mittel, den Verlauf der Kraftlinien sichtbar zu machen. Das ist auch schon häufig geschehen, aber erst im letzten Jahre hat Seddig dieses Verfahren methodisch durchgearbeitet und auf diese

Weise elektrostatische Kraftlinienbilder von großer Schönheit ausgeführt. Derselbe benutzt als kleine Körperchen Glyzinkristalle und als Flüssigkeit für die Suspension Terpentinöl.

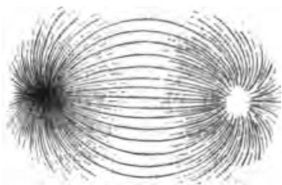


Fig. 72.

In Figuren 72, 73, 74 sind einige schematische Nachbildungen der von Seddig erhaltenen Kraftlinienbilder dargestellt.

Figur 72 zeigt das Kraftfeld, das von zwei punktförmigen elektrischen Ladungen gleich hohen Potentials von entgegengesetztem Zeichen hervorgerufen wird.

Figur 73 zeigt das Kraftfeld zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Platten, in welchem sich ein Metallring befindet. Man erkennt, daß das ohne den Metallring nahezu homogene Feld zwischen den Platten durch den Metallring so deformiert wird, daß die Kraftlinien in die Oberfläche des Metallringes senkrecht eintreten und nun innerhalb der Masse oder vielmehr an der Oberfläche des Metallringes verlaufen. Der innere Hohlraum des Ringes bleibt frei von Kraftlinien.

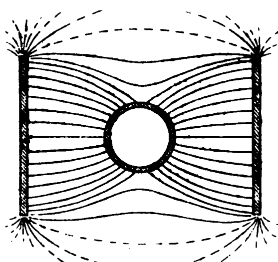


Fig. 73.

Figur 74 zeigt die Wirkung eines Körpers von höherer Dielektrizitätskonstante als die Suspension. Der Kreis zwischen den beiden Platten ist eine mit Methylalkohol (Dielektrizitätskonstante 33) gefüllte Glaskugel. Die Kraftlinien erfahren an der Oberfläche eine Brechung nach dem im § 58 angegebenen Tangentengesetz. Da die Glaskugel geschlossen

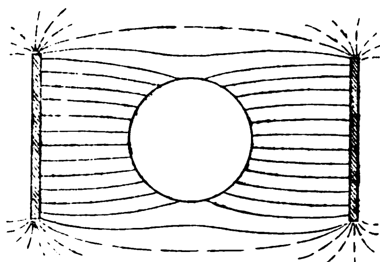


Fig. 74.

war, also natürlich keine Suspension enthalten konnte, treten innerhalb der Kugel keine sichtbaren Kraftlinien auf. Daß sie aber trotzdem vorhanden sind, mag nur erwähnt werden.

§ 65. Das elektrische Potential der Erde.

Wenn man an einem wolkenfreien Tage auf freiem Felde ein in der Nähe des Erdbodens aufgestelltes Elektrometer durch einen dünnen Draht mit einem höher befindlichen, frei in der Luft isoliert gehaltenen Leiter verbindet, so zeigt das Elektrometer stets einen Ausschlag von positiver Elektrizität an, der um so größer ist, je höher man den Leiter in die Luft hält. Diese Tatsache beweist, daß der Raum über der Erdoberfläche ein höheres positives Potential hat, als die Erdoberfläche selbst, oder anders aufgefaßt, daß das Erdpotential im Vergleich zu dem der Atmosphäre negativ ist. Die beobachtete Potentialdifferenz ist bei klarem Wetter, bei Abwesenheit von Rauch und Staub nahezu konstant und in der Nähe der Erdoberfläche der Höhendifferenz proportional.

Bei Anwesenheit von Rauch und Staub, bei bewölktem Himmel oder bei Regen, Schneefall und Nebel ergeben die Beobachtungen Potentialwerte, die von dem bei klarem Wetter wesentlich abweichen, im allgemeinen geringer sind, aber auch manchmal wesentlich höhere Beträge annehmen. Auch ein Wechsel des Vorzeichens kann oft beobachtet werden. Den annähernd konstanten elektrischen Zustand der Atmosphäre ohne die erwähnten störenden Einflüsse nennt man den „normalen“ Zustand derselben.

Der normale Zustand ist gewissen periodischen Wechseln unterworfen. Die Potentialdifferenz ist im Winter durchschnittlich wesentlich höher als im Sommer. Auch erleidet sie täglich Schwankungen mit einem Maximum am Vormittage und einem am Nachmittage.

Die Potentialdifferenz zwischen Erdoberfläche und Atmosphäre beobachtet man mit einem gewöhnlichen aber geeichten Blättchenelektrometer. Man verbindet die Blättchen mituls eines dünnen Drahtes mit einem, einem Probekörper z vergleichenden, Kollektor, der das Potential an dem Punkte des elektrischen Feldes annimmt, an dem er

sich befindet. Man kann als solchen Kollektor entweder einen Flammenkollektor, einen Wassertropfkollektor, ein radioaktives Präparat oder eine Probekugel mit großer Kapazität, z. B. die im vorigen Paragraphen erwähnte kleine Leidener Flasche anwenden. Diesen Kollektor befestigt man auf einem Hartgummistabe von etwa 1—2 m Länge. Man kann dann schon die erwähnte Potentialdifferenz mit genügender Sicherheit nachweisen. Diese Potentialdifferenz wird um so größer, je höher der Kollektor gehoben wird und ist in der Nähe der Erdoberfläche der Höhe ziemlich genau proportional, so daß man also bei einem Kollektor, der um 2 m gehoben ist, das doppelte Potential des um 1 m gehobenen Kollektors erhält.

Es ist nicht unsere Aufgabe, den Schwankungen dieser Potentialdifferenz im einzelnen zu folgen. Wir begnügen uns mit der Angabe eines Mittelwerts. Die Potentialdifferenz beträgt im Sommer durchschnittlich 0,3, im Winter durchschnittlich 2 elektrostatische Einheiten bei 1 m Erhebung.

Für diese Tatsache hat man seit langer Zeit eine genügende Erklärung gesucht. Teils wurde eine positive Eigenladung der Atmosphäre, teils eine negative Eigenladung der Erde als Ursache der Erscheinung hingestellt. Offenbar kann man die angegebenen Potentialdifferenzen aus beiden Ursachen erklären. Besonders die Eigenladung der Erde scheint ein sehr plausibler Erklärungsgrund zu sein, da wir ja wissen, daß die Umgebung jeder isoliert aufgestellten elektrisierten Kugel ein elektrisches Feld darstellt. Ist die elektrische Ladung einer solchen Kugel negativ, so nehmen die negativen Potentialwerte bei Entfernung von der Kugel ab und diese Abnahme entspricht der auch bei der Erde beobachteten scheinbaren Zunahme des positiven Potentials bei Erhebung in der Atmosphäre. Besonders Erman und Peltier vertraten die Hypothese von der negativen Eigenladung der Erde.

Auf Grund der Potentialtheorie läßt sich leicht berechnen, wie groß die negative Eigenladung der Erde sein müßte, wenn das angegebene Potentialgefälle erklärt werden soll. Legen wir das durchschnittliche Sommergefälle von 0,3 elektrostatischen Einheiten pro Meter, also von 0,003 Einheiten pro Zentimeter zugrunde, so ergibt sich folgende Rechnung: Es sei die Gesamtladung der Erde e, dann ist das Potential

an der Erdoberfläche, wenn der Radius der Erde r cm ist, gleich $\frac{e}{r}$. In 1 cm Entfernung von der Erdoberfläche beträgt es also $\frac{e}{r+1}$. Die Potentialdifferenz ist

$$\frac{e}{r} - \frac{e}{r+1} = \frac{e}{r^2},$$

da wir offenbar im Nenner des entwickelten Ausdruckes statt $r(r+1)$ den Ausdruck r^2 setzen können, weil r im Vergleich zu 1 außerordentlich groß ist.

Nennen wir die Oberflächendichte der elektrischen Ladung ϱ, so ist

$$e = 4\pi r^2 \cdot \varrho,$$

also nimmt die Potentialdifferenz die Form

$$\frac{4\pi r^2 \varrho}{r^2} = 4\pi\varrho$$

an. Diese Größe ist aber der Beobachtung entsprechend gleich 0,003 elektrostatischen Einheiten des Potentials, also ist

$$4\pi\varrho = 0{,}003,$$

das ergibt

$$\varrho = \frac{0{,}003}{4\pi} = 0{,}00024 = 2{,}4 \cdot 10^{-4}.$$

Die normale elektrische Flächendichte der Erde betrüge demnach pro Quadratzentimeter $2{,}4 \cdot 10^{-4}$ elektrostatische Einheiten. Die Gesamtladung wäre

$$4\pi r^2 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4}$$

und da

$$r = 6{,}37 \cdot 10^8 \text{ cm}$$

ist, so wird

$$e = 4\pi \cdot 6{,}37^2 \cdot 10^{16} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4},$$

$$e = 1{,}22 \cdot 10^{15}$$

elektrostatische Einheiten.

Die Berechnung ist unter der Voraussetzung gemacht, daß an allen Orten der Erdoberfläche das Potentialgefälle zur selben Zeit 0,003 beträgt. Diese Annahme ist gewiß

nicht berechtigt, denn wir wissen, daß bei uns im Winter das Potentialgefälle wesentlich größer, nämlich 0,02 ist.

Es ruht diese Berechnung aber auch deshalb auf sehr schwachen Füßen, da derselben doch im Vergleich zur gesamten Erdoberfläche nur äußerst wenige Beobachtungen zugrunde liegen. So fehlen z. B. Beobachtungen über das Potentialgefälle über den Ozeanen noch heute vollständig.

Bleiben wir aber einmal bei unserer Annahme stehen, so sind wir noch zu Erklärungsversuchen der täglichen und der jährlichen Schwankungen veranlaßt.

Es ist das Verdienst Exners, zuerst systematische Versuche über die Größe des Potentialgefälles ausgeführt zu haben, und auch besonders dazu angeregt zu haben, daß auch andere Forscher die Schwankungen des Potentialgefälles sorgfältig beobachteten. Aus einer größeren Zahl eigener Beobachtung glaubte er dann, den Schluß ziehen zu können, daß das Potentialgefälle von der Feuchtigkeit der Atmosphäre abhinge. Er brachte diese seine vermutete Abhängigkeit in die Gestalt einer Formel, welche lautete

$$V_0 = V_p(1 + \alpha p) .$$

In dieser Formel bedeutet V_0 das Potentialgefälle bei absolut trockener Luft, V_p das Potentialgefälle bei dem Dampfdruck p der atmosphärischen Feuchtigkeit. Die Größe α war eine Konstante, deren Wert im Mittel 1,3 betrug.

In der Tat genügte diese Formel vollkommen zur Erklärung der Exnerschen Beobachtungen.

Die Exnerschen Beobachtungen waren alle in der Nähe der Erdoberfläche gemacht, und da hier annähernd Proportionalität zwischen Potentialdifferenz und Höhe herrschte, glaubte man berechtigt zu sein, die Proportionalität auch für größere Höhen annehmen zu können. Erst später konnte man durch Beobachtungen auf Höhenstationen, besonders durch Beobachtungen vom Luftballon aus nachweisen, daß die Annahme nicht berechtigt war. Vielmehr nahm das Potentialgefälle mit der Höhe ganz wesentlich ab und zwar in viel bedeutenderem Grade als es aus der durch die größere Entfernung bedingten Abnahme der elektrostatischen Feldstärke einer negativ geladenen Kugel erklärbar war. Schon in einer Höhe von 3000 Metern sinkt es bei normalem Zustande der Atmosphäre auf ein Zehntel des Wertes

auf der Erdoberfläche. Vielfache Beobachtungen vom Luftballon aus lassen den Schluß berechtigt erscheinen, daß das Potentialgefälle in einer Höhe von 5—6 km vollständig gleich Null wird, daß also außerhalb dieses Gebietes überhaupt kein elektrostatisches Feld mehr existiert. Die auf der Erdoberfläche der Erde mündenden Kraftlinien haben ihren Ursprung innerhalb der Atmosphäre. Das ist mit der Potentialtheorie nicht vereinbar, wenn nur die Erde ein negatives Potential hat, denn dann müßten die Kraftlinien aus dem Unendlichen kommen.

Hiermit fällt aber die einfache Theorie der elektrisch geladenen Erde, bei der die elektrische Ladung der Atmosphäre und der in der Atmosphäre befindlichen Körper einfach auf Influenzladungen zurückzuführen sind.

Wenn die von einem negativ geladenen Körper ausgehenden Kraftlinien im Endlichen aufhören, so kann das nur seine Ursache darin haben, daß außerhalb dieses Körpers sich noch Körper befinden, die selber positiv geladen sind. So ist man denn schließlich gezwungen, außer der negativen Eigenladung der Erde eine positive Eigenladung der Atmosphäre anzunehmen.

Elster und Geitel glauben zu der Annahme berechtigt zu sein, daß die negative Eigenladung der Erde mit der positiven Eigenladung der Erde vereinigt den neutralen elektrischen Zustand, d. h. das Gesamtpotential Null ergeben würden. Mit dieser Annahme aber tritt eine neue Schwierigkeit für die Erklärung der Potentialdifferenz zwischen Erde und Atmosphäre auf.

Besonders seit man weiß, daß die atmosphärische Luft stets eine wenn auch geringe Leitfähigkeit für elektrische Ladungen besitzt, erscheint es unerklärlich, daß die elektrische Ladung von Erde und Atmosphäre sich nicht schon lange ausgeglichen haben. Die eigentümliche annähernd konstante Potentialdifferenz erscheint völlig unerklärlich.

Erst in allerjüngster Zeit ist von Ebert eine Theorie aufgestellt, die geeignet erscheint, die Erklärung hierfür zu bieten. Dieselbe kann hier nur ganz kurz angedeutet werden.

Die Leitfähigkeit der Luft ist abhängig von dem Gehalt der Luft an freien Ionen, d. s. Luftmoleküle, die infolge irgend welcher Einflüsse in einen positiv elektrischen und einen negativ elektrischen Bestandteil zerfallen sind, ähn-

lich wie die Leitfähigkeit eines Elektrolyten von der Dissoziation, d. i. ebenfalls von dem Zerfall der Molekeln in positiv und negativ geladene Ionen abhängt. Die Ionisierung, also der Zerfall der Molekeln in Ionen, wird von mancherlei Ursachen hervorgerufen, von denen hier erwähnt werden mag die Bestrahlung mit ultraviolettem Licht, die Bestrahlung mit Röntgenstrahlen und Becquerelstrahlen und das Eintreten einer Reihe von chemischen Prozessen.

Nun wissen wir, daß es eine Reihe von Körpern gibt, die die besondere Eigentümlichkeit haben, andauernd ohne sichtbare Energiequelle Becquerelstrahlen auszusenden. Solche Körper sind in besonders hohem Grade das von S. und P. Curie entdeckte und untersuchte Radium, ferner das Polonium, das Thorium und noch eine Reihe anderer Körper, die diese Ausstrahlung in geringerem Grade zeigen. Untersuchungen von Elster und Geitel und nach ihnen von anderen Physikern haben den unzweifelhaften Nachweis geliefert, daß an fast allen Stellen der Erdoberfläche Spuren von Radium vorhanden sind, woraus sich erklärt, daß die unmittelbar aus dem Erdboden entnommenen Luftmengen, die sogenannte Bodenluft, einen sehr großen Gehalt an freien Ionen haben.

Ebert baut seine Theorie des Erdpotentials auf diesen Gehalt des Erdbodens an freien Ionen auf.

Wenn ionenhaltige Luft durch enge Kanäle langsam hindurchstreicht, so geben die negativen Ionen ihre elektrische Ladung leichter an diese Kanäle ab als die positiven. Wenn daher dem Erdboden Luft entsteigt, so hat sie die Partie des lockeren Erdbodens, also ebenfalls enge Kanäle zu durchwandern. Die negativen Ionen der ionenreichen Bodenluft geben ihre Ladungen zum großen Teile an die Erde ab, während die positiven Ionen in noch geladenem Zustande den Erdboden verlassen und von hier in die Atmosphäre entführt werden. So erklärt sich einerseits die negative Ladung der Erdoberfläche und andererseits die positive Ladung der Atmosphäre.

Die Ebertsche Theorie des Erdpotentials ist noch zu neu, um als vollständig sicher hingestellt werden zu können, doch erscheint sie besonders deshalb plausibel, weil sie gleichzeitig die Begründung enthält für eine bis dahin unerklärliche Übereinstimmung der Periode der beobachteten